



Version unifiée du traitement des singularités en décomposition de domaine.

Chokri Chniti

► To cite this version:

Chokri Chniti. Version unifiée du traitement des singularités en décomposition de domaine.. Mathématiques [math]. Ecole Polytechnique X, 2005. Français. NNT: . pastel-00001439

HAL Id: pastel-00001439

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00001439>

Submitted on 27 Jul 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Centre de Mathématiques Appliquées

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Discipline : Mathématiques Appliquées

présentée par

Chokri CHNITI

le 27 juillet 2005

Titre :

**Version unifiée de traitement des singularités
en décomposition de domaine.**

JURY

M. Martin Costabel (Rapporteur)

M. Patrick Ciarlet (Rapporteur)

M. Francis Nier

M. Frédéric Nataf

M. Kamel Hamdache

Remerciements

Je suis heureux d'exprimer toute ma gratitude à mes directeurs de thèse :

Monsieur Frédéric Nataf qui ma fait découvrir les méthodes de décomposition de domaine et l'analyse numérique et je le remercie infiniment pour son encouragement, sa gentillesse, sa passion pour la recherche et la richesse de ses idées, il a guidé mes premiers pas dans la recherche avec une patience constantes.

Monsieur Francis Nier, je le remercie particulièrement, il m'a aidée de ses conseils, de sa bonne humeur tout le long de ce travail, ainsi sa présence à chaque instant difficile et son aide importante pour résoudre nombre de mes problèmes théoriques grâce à ses compétences et son enthousiasme.

Ainsi je vous en serais très reconnaissant.

Je tiens à remercier monsieur Vincent de m'avoir accueillie au sein de l'équipe de CMAP.

J'associe à mes remerciements tous les membres du CMAP, et merci beaucoup pour l'ambiance qui m'ont offert pour que je puisse terminer cette thèse.

Je tiens à remercier chacun des membres du jury :

Les professeurs Martin Costabel et Patrick Ciarlet qui ont eu la gentillesse de reporter cette thèse rapidement.

Le professeur Kamel Hamdache qui ont accepté de participer à ce jury, sans oublier Francis Nier et Frédéric Nataf.

Merci à ma famille, qui m'ont offert des bonnes conditions pour terminer mes études, leur soutien, merci encore pour ma grande mère pour son amour.

Je ne voudrais pas oublier tous mes amis qui m'ont soutenue et encouragée durant mes études.

Enfin, je remercie le personnel de l'imprimerie de l'École Polytechnique qui a effectué le tirage.

Table des matières

1	<i>Généralités et rappels</i>	11
1.1	Méthode de décomposition de domaine	11
1.1.1	Motivation de l'utilisation des méthodes de décomposition de domaine	11
1.1.2	Historique des méthodes de décomposition de domaine	12
1.2	Méthode de Schwarz	12
1.3	Introduction aux conditions aux limites artificielles	14
1.3.1	Rappel sur les CLA exactes : cas de 2 sous-domaines	14
1.4	Les CLA exactes en tant que condition d'interface	17
1.5	Convergence de l'algorithme de Schwarz avec les conditions aux limites... .	17
1.5.1	Cas d'un découpage en deux sous-domaines	18
1.5.2	Cas d'une décomposition en N sous-domaines	21
2	<i>Propriétés de la transformation de Mellin et les espaces de Sobolev</i>	23
...		
2.1	Transformation de Mellin	23
2.1.1	Isométrie et Propriétés de M	24
2.2	Les espaces à poids en dimension un	26
2.2.1	Transformation de Fourier à poids exponentiel	26
2.2.2	Traduction des propriétés de la transformation de Fourier en transformation de Mellin	28
2.3	Les espaces à poids en dimension n	28
2.3.1	Propriétés de la transformation de Mellin en dimension n	29
2.3.2	Les espaces de Sobolev à poids : $H^{s,\gamma}$	30
2.4	Espaces de Sobolev usuels	34
2.4.1	Cas de la dimension un	37
2.4.2	Cas de la dimension $n > 1$	41
3	<i>Types asymptotiques et stratégie de l'optimisation des conditions ...</i>	45
3.1	Résumé du chapitre précédent.	45
3.2	Quelques rappels.	46
3.2.1	Un exemple.	46
3.2.2	Un autre exemple	48
3.3	Résultats de Kondratiev	51
3.4	Types asymptotiques	53

3.5	Stratégie pour la décomposition de domaine.	56
3.6	Deux remarques importantes.	57
4	<i>Décomposition de domaine avec coin sur le bord</i>	59
4.1	Introduction	59
4.2	Motivation	59
4.3	Construction des conditions d'interface d'ordre 2	60
4.3.1	Traduction des conditions aux limites artificielles exactes à un secteur du plan sans modification	60
4.3.2	Traduction des conditions aux limites artificielles exactes à un secteur avec modification	63
4.4	Formulation variationnelle	63
4.5	Coin interface bord avec terme d'ordre zéro dans les conditions d'interface	68
4.5.1	Cas des conditions de Dirichlet à bord plat	69
4.5.2	Cas des conditions de Dirichlet secteur	75
4.5.3	Cas des conditions de Neumann.	79
4.6	Construction des conditions d'interface	83
4.7	Discretisation	85
4.7.1	Cas à deux sous-domaines : Problème continu	85
4.7.2	Cas à deux sous-domaines : Problème discret	86
4.8	Maillage adapté à la singularité	88
4.9	Quelques résultats numériques	91
4.9.1	Coin interface-bord avec angle droit	91
4.9.2	Coin interface bord avec angle quelconque	102
4.10	Remarques importantes	116
5	<i>Décomposition de domaine avec coin intérieur</i>	117
5.1	Introduction	117
5.2	Calcul des pôles avec condition d'ordre 2 pour un sous-domaine	118
5.3	Etude de l'équation (5.3)	122
5.3.1	Détermination de l'équation des pôles	122
5.4	Etude avec des données bien choisies	124
5.4.1	Cas des données régulières	124
5.4.2	Cas des données associées au problème de Neumann	127
5.5	Cas à deux paramètres : α_+ en θ_+ et α_- en θ_-	128
5.5.1	Calcul des pôles	129
5.5.2	Etude avec des données bien choisies	133
5.6	Construction des conditions d'interface	134
5.7	Quelques résultats numériques	135

Introduction

Les méthodes de décomposition de domaine se sont particulièrement développées ces dix dernières années avec l'arrivée d'ordinateurs parallèles et constituent actuellement un axe de recherche très actif en analyse numérique. Elles sont actuellement bien comprises dans le cas d'un domaine régulier décomposé en sous-domaines réguliers, voir par exemple [24], [15] et [1]. Un enjeu important pour les applications est une bonne compréhension des cas singuliers : problèmes à coins (2D), arêtes et trièdres (3D).

Le principe de ces méthodes est le suivant : pour un opérateur elliptique L et un domaine Ω , on cherche à résoudre

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ +C.L & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

Quand le domaine Ω est "grand", on le décompose en sous-domaines, $\overline{\Omega} = \cup_{i=1}^N \overline{\Omega}_i$ où les Ω_i sont des ouverts de Ω et on résout de façon itérative

$$\begin{cases} Lu_i^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_i \\ B_{ij}\gamma_{ij}u_i^{n+1} = B_{ij}\gamma_{ij}u_j^n & \text{sur } \partial\Omega_i \cap \overline{\Omega}_j (i \neq j) \\ +C.L & \text{sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \end{cases}$$

pour $i = 1, \dots, N$. Les opérateurs d'interface B_{ij} sont des opérateurs différentiels ou pseudo-différentiels appliqués aux vecteurs traces γ_{ij} , $i, j = 1 \dots N$.

Le choix des opérateurs d'interface a une très grande influence sur la vitesse de convergence de l'algorithme. Dans le cadre des interfaces régulières, cette analyse a déjà été faite tant au niveau théorique que numérique : un choix optimal repose sur un compromis entre optimalité théorique et facilité d'implémentation, voir [16].

Dans la situation avec singularités géométriques on peut envisager deux situations :

1. Le cas où le domaine global Ω est régulier et donc la solution globale est plus régulière a priori que les solutions du problème dans chaque sous-domaine seulement régulier (C^1) par morceaux avec des conditions d'interfaces usuelles, voir figure 1.
2. Le domaine global est singulier et non convexe et donc la solution globale présente des singularités qui n'apparaissent pas a priori dans les solutions des problèmes

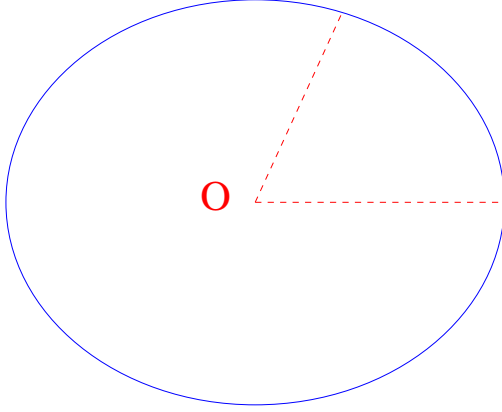


FIG. 1 – Domaine régulier.

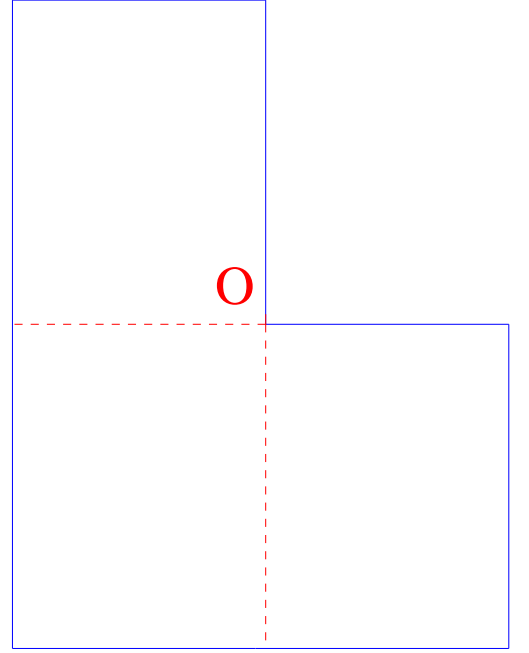


FIG. 2 – Domaine irrégulier.

dans chaque sous-domaine supposé régulier avec des conditions d'interfaces bien choisies, voir figure 2.

Nous considérons dans ce travail le cas où L est le Laplacien en dimension deux. L'analyse du problème en dimension deux à l'aide de la transformée de Mellin conduit à considérer des conditions d'interface à proximité des sous-domaines de la forme

$$B_{ij} = \frac{\partial}{\partial n_i} + \frac{\beta_{ij}}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\alpha_{ij}}{2} r \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

où r désigne la distance au coin, n_i la normale extérieure au sous-domaine Ω_i , α_{ij} et β_{ij} sont des coefficients à déterminer. Les types asymptotiques de u_i^{n+1} dépendent de ceux de $B_{ij}(u_j^n)$ ainsi que des coefficients α_{ij} et β_{ij} . On se place dans la situation idéale où u_j^n a les mêmes types asymptotiques que ceux de la solution u de (1). On choisit α_{ij} et β_{ij} de façon à ce que les types asymptotiques de u_i^{n+1} soient le plus proche possible de ceux de u . Les formules correspondantes pour α_{ij} et β_{ij} sont différentes selon que l'on se trouve dans l'une des deux situations évoquées plus haut.

Des simulations numériques basées sur la méthode des éléments finis et réalisés à l'aide du logiciel FreeFem++ confortent cette approche puisque le nombre minimum d'itérations correspond au choix théorique proposé.

Ce travail est présenté de la manière suivante :

1. Dans le premier chapitre nous faisons un rappel bibliographique de la méthode de décomposition de domaine pour résoudre le problème de Laplace, nous introduisons la notion des conditions aux limites artificielles exactes, et nous rappelons quelques résultats d'optimisation des conditions d'interface.

2. Dans le deuxième chapitre nous rappelons la théorie de V.Kondratiev et les propriétés de la transformée de Mellin, qui permet de décrire la régularité H^s dans les domaines à coins.
3. Dans le chapitre trois nous présentons la notion de type asymptotique et nous introduisons des espaces de Sobolev avec singularités prescrites qui interviennent dans la résolution des problèmes elliptiques.
4. Le chapitre 4 a pour objet la construction des opérateurs d'interface de la forme

$$\frac{\partial}{\partial n} + \frac{\beta}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\alpha}{2} r \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

où r est la distance au coin. Nous faisons une étude d'optimisation des conditions d'interface dans le cas où le domaine global est irrégulier (voir figure 2). Nous donnerons des résultats numériques réalisés avec le logiciel FreeFem++.

5. Dans ce chapitre 5, contrairement au chapitre précédent nous traitons le cas où le domaine global est régulier (voir figure 1). Nous travaillons avec des conditions d'interface de type

$$\frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\alpha}{2} r \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

où r est la distance au coin. Nous faisons une étude d'optimisation des conditions d'interface. Dans le cadre d'une décomposition en deux sous-domaines, un calcul explicite montrera qu'on peut optimiser que dans le sous-domaine convexe. Nous présentons des résultats numériques qui confirment nos prévisions théoriques.

Chapitre 1

Généralités et rappels

Nous exposons dans ce chapitre les principes et généralités des méthodes de décomposition de domaines et la construction des conditions aux limites artificielles (CLA) exactes. Nous ne ferons qu'un bref rappel sur les méthodes de décomposition de domaines et des définitions des CLA exactes. Nous reviendrons en détail sur l'application de ces méthodes pour la résolution des problèmes aux dérivées partielles avec des CLA exactes bien choisies pour avoir des algorithmes efficaces.

1.1 Méthode de décomposition de domaine

1.1.1 Motivation de l'utilisation des méthodes de décomposition de domaine

L'objectif principal des méthodes de décomposition de domaine est de trouver des solutions aux problèmes issus des équations aux dérivées partielles définies sur des géométries compliquées ou de grande taille. En effet, la résolution directe du problème dans le domaine global engendre des systèmes linéaires de grande taille difficiles à résoudre par des solveurs directs ou méthodes itératives classiques, d'autant plus que de tels systèmes sont souvent mal conditionnés, d'où l'utilité des méthodes de décomposition de domaine. Elles permettent de décomposer le problème initial en des sous-problèmes de petite taille définis sur des géométries plus simples. En outre, les méthodes de décomposition de domaine ont récemment eu un grand intérêt du point de vue théorique et numérique car elles fournissent des algorithmes bien adaptés aux ordinateurs parallèles, elles peuvent s'appliquer à des problèmes définis sur des géométries complexes, elles facilitent l'utilisation des schémas numériques (éléments finis, différences finies,...) pour chaque sous-problème et peuvent être combinées avec d'autres méthodes telles que le raffinement local du maillage.

Les méthodes de décomposition de domaine consistent à partager le domaine de résolution d'une équation aux dérivées partielles en sous-domaines. On peut alors traiter des problèmes de grande taille pour lesquels aucun ordinateur n'aurait suffisamment de place mémoire. On reformule le problème en un problème équivalent dont les inconnues sont des fonctions définies sur les interfaces des sous-domaines (méthode de

sous-structuration). La résolution du problème d'interface par des méthodes itératives (de type Gradient conjugué) s'effectue par des résolutions successives du problème dans chaque sous-domaine de façon indépendante : chaque sous-domaine est attribué à un processeur qui résout son problème à l'aide des données contenues dans la mémoire locale. Au cours de la résolution des problèmes d'interface, il est nécessaire de choisir des bonnes conditions de raccord sur les interfaces des sous-domaines pour avoir une vitesse de convergence optimale.

1.1.2 Historique des méthodes de décomposition de domaine

La première méthode de décomposition de domaine a été développée à la fin du 19^{ème} siècle par le mathématicien H.A.Schwarz dans le but d'étudier l'opérateur de Laplace. Son idée est d'étudier le problème dans le cas où Ω est la réunion de domaines simples, par exemple : l'union d'un rectangle et d'un disque.

Nous présenterons plus tard un rappel sur la méthode de Schwarz.

La méthode de Schwarz nécessite un recouvrement entre les sous-domaines [18] (H.A. Schwarz, 1870). La convergence a été étudiée par H.A.Schwarz, puis P.L.Lions [20] (P.L. Lions, 1988). L'inconvénient de ce type de découpage est la complexité de sa mise en oeuvre numérique, surtout dans le cas de problèmes 3D, en outre il est difficile de définir les zones de recouvrement pour des géométries très complexes. De plus, la convergence de la méthode est très lente.

- Vu la complexité de la première méthode, une autre méthode a été introduite : la méthode de décomposition de domaine sans recouvrement des sous-domaines. Dans ce cas on doit choisir des opérateurs d'interface spécifiques pour que la méthode converge. Une extension de la méthode de Schwarz dans le cas sans recouvrement a été introduite dans [21] (P.L. Lions, 1989), puis [4] (B. Desprès, 1991), [9] (F. Nataf, F. Rogier et P. Charton, 1991), [2] (C. Carlenzoli et A. Quarteroni, 1995). Dans [23] (P. Le Tallec, 1994) a prouvé que l'algorithme de Schwarz est un cas particulier des méthodes de sous-structuration.

1.2 Méthode de Schwarz

La méthode de Schwarz sert à résoudre des problèmes elliptiques sur un domaine décomposé en plusieurs sous-domaines qui se recouvrent. Pour simplifier on va se limiter aux problèmes elliptiques avec des conditions aux limites homogènes.

Exemple : soit $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$ avec $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$

On résout

$$\begin{cases} (\eta - \Delta)u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $\eta \geq 0$.

Pour une décomposition en deux sous-domaines, on rappelle l'algorithme de Schwarz :

soient (u_1^n, u_2^n) une approximation de $(u|_{\Omega_1}, u|_{\Omega_2})$ à l'itération n de l'algorithme. (u_1^{n+1}, u_2^{n+1}) sont définis par :

$$\begin{cases} (\eta - \Delta)u_1^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ u_1^{n+1} = u_2^n & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \overline{\Omega_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\eta - \Delta)u_2^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ u_2^{n+1} = u_1^{n+1} & \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \overline{\Omega_1} \end{cases}$$

Le problème dans Ω_1 doit être résolu avant celui de Ω_2 , une légère modification de l'algorithme est la méthode de Schwarz additive.

$$\forall i, j \in \{1, 2\}, \begin{cases} (\eta - \Delta)u_i^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_i \\ u_i^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \\ u_i^{n+1} = u_j^n & \text{sur } \Gamma_i = \partial\Omega_i \cap \overline{\Omega_j} \end{cases}$$

Les deux problèmes dans Ω_1 et Ω_2 peuvent être résolus concurremment. On itère plusieurs fois, jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit vérifié, on peut par exemple utiliser comme critère d'arrêt, pour ϵ assez petit donné :

$$\|u_1^{n+1}|_{\Gamma_1} - u_1^n|_{\Gamma_1}\| \leq \epsilon \text{ et } \|u_2^{n+1}|_{\Gamma_2} - u_2^n|_{\Gamma_2}\| \leq \epsilon$$

ou

$$\|u_1^{n+1} - u_1^n\| \leq \epsilon \text{ et } \|u_2^{n+1} - u_2^n\| \leq \epsilon$$

Schwarz prouve qu'il y a convergence de (u_1^n, u_2^n) vers $(u|_{\Omega_1}, u|_{\Omega_2})$ quand n tend vers l'infini en utilisant le principe de maximum.

Vers les années 30, Sobolev a découvert une formulation variationnelle pour des problèmes en élasticité linéaire [Sobolev, 1936], il a montré qu'on peut utiliser ces algorithmes même pour des problèmes ne vérifiant pas le principe de maximum. Puis 1988, P.L.Lions a montré que la convergence de méthode de Schwarz dépend de la taille du recouvrement δ , du pas de discrétisation h et du diamètre caractéristique des sous-domaines. On note que la convergence est meilleure si le recouvrement est important.

L'avantage de ces algorithmes est l'économie en place mémoire, en effet si ces algorithmes sont résolus par des méthodes directes le coût de stockage est très grand, mais en divisant le problème original en plus petits morceaux la quantité de stockage peut être réduite.

L'inconvénient de la méthode additive de Schwarz est le besoin d'une décomposition de domaine avec recouvrement afin de converger, mais on peut remplacer les conditions de Dirichlet sur l'interface par d'autres conditions qui apportent la convergence pour une décomposition de domaine sans recouvrement, exemple : on prend la condition de Robin $(\partial_n + \beta)$,... de plus, on peut optimiser les conditions d'interface afin d'avoir une convergence plus rapide. Parmi les résultats on note celui de P.L.Lions prouvant la convergence en remplaçant les données de Dirichlet sur l'interface par des conditions de type Robin.

Nous supposons pour simplifier les calculs que le domaine Ω est découpé en deux sous-domaines disjoints séparés par une interface Γ_{12} . De façon générale l'algorithme de Schwarz dans le cas d'un découpage du domaine sans recouvrement se présente comme suit :

• **Algorithme de Schwarz, sans recouvrement**

Soit $(u_i^0)_{i=1,2}$ une approximation initiale de la solution de u dans chaque sous-domaines dans le cas d'un découpage en deux sous-domaines, et $(u_i^n)_{i=1,2}$ la valeur de l'approximation de u à l'itération n . L'algorithme de Schwarz s'écrit :

$$\begin{cases} L(u_1^{n+1}) = f, & \text{dans } \Omega_1 \\ B_1(u_1^{n+1}) = B_1(u_2^n) & \text{sur } \Gamma_{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L(u_2^{n+1}) = f, & \text{dans } \Omega_2 \\ B_2(u_2^{n+1}) = B_2(u_1^n) & \text{sur } \Gamma_{12} \end{cases}$$

où B_1 et B_2 sont des opérateurs d'interfaces.

En décomposition de domaine, le choix des conditions de raccord aux interfaces des sous-domaines est très important pour obtenir des algorithmes stables et performants.

Nous proposerons d'abord un rappel bibliographique des conditions aux limites artificielles (CLA) puis nous donnerons une méthode de construction des conditions d'interface en décomposition de domaine à partir des CLA pour résoudre le problème : $(\eta - \Delta)u = f$.

1.3 Introduction aux conditions aux limites artificielles

Dans cette section nous exposons la notion de condition aux limites artificielles et son utilité pour choisir des conditions de raccord aux interfaces comme dans [12], [13] (F. Nataf et F. Rogier 1994-1995). Choisir comme condition d'interface les conditions aux limites absorbantes est un point fondamental car cela permet d'améliorer le taux de convergence, voir [15] (F. Nataf, F. Nier).

1.3.1 Rappel sur les CLA exactes : cas de 2 sous-domaines

On note par n_i la normale extérieure à un sous-domaine Ω_i de \mathbb{R}^2 et τ_i le vecteur tangent unitaire défini comme suit (voir figure 1.1) :

Les conditions aux limites artificielles (CLA) sont utilisées en calcul scientifique pour résoudre des problèmes posés dans des domaines non bornés (cas de \mathbb{R}^2).

Si on fait une discrétisation de types éléments finis, volumes finis, différences finies, il est nécessaire de tronquer le domaine de calcul par une frontière artificielle sur laquelle il faut donner une condition aux limites dite artificielle. De manière idéale, cette condition est telle que la solution calculée dans le domaine tronqué soit la restriction de la solution calculée dans le domaine non tronqué, on dira qu'une telle condition aux limites est une condition aux limites artificielle exacte (CLAE). En général cette condition s'écrit sous forme intégrale en espace et temps et son implémentation numérique est très coûteuse.

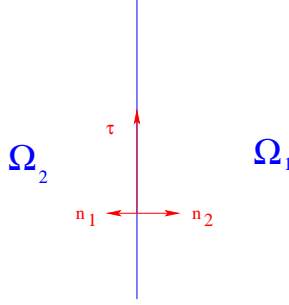


FIG. 1.1 – Interface entre deux sous-domaines

Ce problème a motivé la recherche d'une condition qui approche (en espaces et en temps) les CLAE, ceci fait l'objet de plusieurs travaux ([7], [8], Engquist et A. Majda 1977-1979).

On suppose qu'on veut résoudre l'équation : $L(u) = f$ dans \mathbb{R}^2 où $L = \eta - \Delta, \eta \geq 0$. On suppose de plus que le support de f est inclus dans le demi espace $x \leq 0$. On considère la troncature du domaine de calcul à droite par la frontière artificielle $x = 0$, notée Γ .

On introduit l'opérateur de Steklov-Poincaré du demi-espace $\{x \geq 0\}$:
 $\Lambda_{x>0} : u_0 \longrightarrow -\frac{\partial}{\partial x}w(0, y)$ où

$$\begin{cases} L(w) = 0, x \geq 0 \\ w(0, y) = u_0(y) \\ w \text{ est bornée à l'infini} \end{cases}$$

On cherche à mettre une condition aux limites en $x = 0$ qui soit exacte, c'est-à-dire que l'on cherche un opérateur B tel que la solution v du problème :

$$\begin{cases} L(v) = f, x < 0 \\ B(v) = 0, x = 0 \end{cases}$$

soit la restriction de u sur $] -\infty, 0] \times \mathbb{R}$.

Comme u vérifie $L(u) = 0$ dans $[0, \infty[\times \mathbb{R}$, d'après la définition de $\Lambda_{x>0}$ et l'unicité de solution du système vérifié par w , nous avons $(\partial_x + \Lambda_{x>0})(u) = 0$ en $x = 0$, cette condition s'appelle condition aux limites artificielle exacte.

On suppose maintenant que le support de f est inclus dans le demi-espace $x \geq 0$.

On introduit l'opérateur de Steklov-Poincaré du demi-espace $\{x \leq 0\}$:
 $\Lambda_{x<0} : u_0 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}w(0, y)$ où

$$\begin{cases} L(w) = 0, x \leq 0 \\ w(0, y) = u_0(y) \\ w \text{ est bornée à l'infini} \end{cases}$$

On cherche à mettre une condition aux limites en $x = 0$ qui soit exacte, c'est-à-dire que l'on cherche un opérateur B tel que la solution v du problème :

$$\begin{cases} L(v) &= f, x > 0 \\ B(v) &= 0, x = 0 \end{cases}$$

soit la restriction de u sur $[0, -\infty[\times \mathbb{R}$.

Comme u vérifie $L(u) = 0$ dans $[0, \infty[\times \mathbb{R}$, d'après la définition de $\Lambda_{x<0}$ et l'unicité de solution du système vérifié par w , nous avons $(\partial_x - \Lambda_{x<0})(u) = 0$ en $x = 0$, cette condition s'appelle condition aux limites artificielle exacte.

Comme L est un opérateur à coefficients constants, le symbole de $\Lambda_{x>0}$ peut être déterminé explicitement.

On désigne par \hat{w} la transformée de Fourier partielle par rapport à y de w et k la variable duale associée à y . On définit

$$\hat{w}(x, k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-iky} w(x, y) dy$$

et F_k^{-1} désigne la transformée de Fourier inverse.

Prenons la transformée de Fourier partielle par rapport à y de $L(w) = 0$ on obtient :

$$(\eta - \partial_x^2 + k^2)\hat{w}(x, k) = 0, \text{ dans } x > 0 \text{ et } k \in \mathbb{R}.$$

Les solutions sont cherchées sous la forme $\sum_i \alpha_i(k) e^{\lambda_i(k)x}$ où les $\lambda_i(k)$ annulent le polynôme caractéristique de $L : \eta - \lambda^2 + k^2$

Ainsi nous avons deux possibilités pour $\lambda_i(k)$:

$$\lambda^- = -\sqrt{\eta + k^2}, \quad \lambda^+ = \sqrt{\eta + k^2}$$

La solution \hat{w} étant bornée à l'infini, le terme en facteur de $e^{\lambda^+ x}$ doit être nul. Nous avons ainsi :

$$\hat{w}(x, k) = b(k) e^{\lambda^-(k, \eta)x},$$

or en $x = 0$, $\hat{w}(0, k) = \hat{u}_0(k)$ donc :

$$\hat{w}(x, k) = \hat{u}_0(k) e^{\lambda^-(k, \eta)x}$$

et

$$\Lambda_{x>0}(u_0) = F_k^{-1}(-\lambda^-(k) \hat{u}_0(k)).$$

De même, si le support de f est inclut dans \mathbb{R}_+ , on a

$$\Lambda_{x<0}(u_0) = F_k^{-1}(\lambda^+(k) \hat{u}_0(k))$$

Remarque 1 Dans le cas où L est un opérateur à coefficients constants on prend la transformée de Fourier de L par rapport à y , on peut le factoriser.

Exemple : soit $L = \eta - \Delta$

L peut s'écrire sous la forme

$$L = -(\partial_x - \Lambda_{x<0})(\partial_x + \Lambda_{x>0})$$

Les opérateurs intervenants dans les conditions aux limites artificielles exactes sont les termes de la factorisation de L . Si L est à coefficients variables on peut relier la factorisation de L aux conditions aux limites artificielles exactes (voir [17], F. Nataf, F. Nier).

Pour les méthodes de type Schwarz plusieurs conditions d'interface ont été introduites à partir des conditions aux limites artificielles.

1.4 Les CLA exactes en tant que condition d'interface

Les conditions aux limites artificielles ont été utilisées pour la première fois comme condition d'interface dans [19] (T. Hagstrom, R.P. Tewarson et A. Jazcilevich, 1988). On a alors convergence en deux itérations de la méthode de décomposition de domaine. En général les opérateurs intervenant dans les CLA exactes ne sont pas utilisés directement comme conditions d'interface, car ils ne sont pas des opérateurs aux dérivées partielles et donc leur implémentation numérique dans un code sera très pénible. Pour cette raison, il faut chercher des opérateurs aux dérivées partielles qui approchent ceux intervenant dans les CLA exactes.

On a vu que les opérateurs intervenant dans les conditions aux limites artificielles exactes sont de la forme :

$$(\partial_x + \Lambda_{x>0}), (\partial_x - \Lambda_{x<0}).$$

Les opérateurs $\Lambda_{x<0}$ et $\Lambda_{x>0}$ ne sont pas des opérateurs aux dérivées partielles. Nous sommes motivés par la recherche des opérateurs aux dérivées partielles qui approchent $\Lambda_{x<0}$ et $\Lambda_{x>0}$, ceci revient à approcher λ^- et λ^+ par un polynôme en k . Par simplicité, on ne regardera que des polynômes d'ordre 2 qui correspondent à des conditions d'interface avec des dérivées tangentes d'ordre 2 faciles à mettre en oeuvre numériquement. Le choix de cette approximation sera fait de façon à accélérer la convergence de l'algorithme.

On travaille avec des opérateurs d'interface qui contiennent des dérivées tangentes d'ordre 2, exemple :

$$B = \frac{\partial}{\partial n} + \beta - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \quad (1.1)$$

où α et β sont deux constantes positives, est une CLA qui approche les CLAE.

Avec ce choix d'opérateur l'algorithme de Schwarz s'écrit :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2\}, \begin{cases} (\eta - \Delta)u_i^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_i \\ \left(\frac{\partial}{\partial n_i} + \beta - \frac{\partial}{\partial \tau_i} \left(\frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial \tau_i} \right) \right) u_i^{n+1} = \left(-\frac{\partial}{\partial n_j} + \beta - \frac{\partial}{\partial \tau_j} \left(\frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial \tau_j} \right) \right) u_j^n \text{ sur } \partial\Omega_i \cap \overline{\Omega_j} \end{cases} \quad (1.2)$$

1.5 Convergence de l'algorithme de Schwarz avec les conditions aux limites approchées

Dans cette section, nous rappelons un résultat de convergence montré dans [15] (F. Nataf et F. Nier, 1997). Nous utiliserons dans toute la suite les mêmes notations que les

sections précédentes, et nous travaillerons avec les CLA approchées qui s'écrivent dans le cas général sous la forme :

$$B_1 = \frac{\partial}{\partial n_1} + \beta - \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left(\frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial \tau_1} \right)$$

$$B_2 = \frac{\partial}{\partial n_2} + \beta - \frac{\partial}{\partial \tau_2} \left(\frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial \tau_2} \right)$$

où α et β sont deux constantes positives.

Dans la suite, on montre que le lien entre B_1 et B_2 est crucial pour obtenir des algorithmes qui convergent rapidement.

1.5.1 Cas d'un découpage en deux sous-domaines

On note e_i^n l'erreur $u_i^n - u$ à l'interface $\Gamma_{12} = \{0\} \times \mathbb{R}$ de Ω_i à l'itération $n, i = 1, 2$.

On définit le taux de convergence de l'algorithme de Schwarz par :

$$e_i^{n+2} = \rho e_i^n, n \geq 0$$

• Calcul du taux de convergence

D'après la partie 1.3.1 on a :

$$\hat{e}_1^{n+1} = \gamma_1^{n+1}(k) e^{\lambda^- x} \quad (1.3)$$

$$\hat{e}_2^{n+1} = \gamma_2^{n+1}(k) e^{\lambda^+ x} \quad (1.4)$$

où γ_1 et γ_2 sont deux fonctions qui dépendent de k .

On rappelle les conditions d'interface approchées appliquées à l'erreur :

$$\left(\partial_{n_1} + \beta - \partial_{\tau_1} \left(\frac{\alpha}{2} \partial_{\tau_1} \right) \right) e_1^{n+1} = \left(-\partial_{n_2} + \beta - \partial_{\tau_2} \left(\frac{\alpha}{2} \partial_{\tau_2} \right) \right) e_2^n \quad (1.5)$$

et

$$\left(\partial_{n_2} + \beta - \partial_{\tau_2} \left(\frac{\alpha}{2} \partial_{\tau_2} \right) \right) e_2^{n+1} = \left(-\partial_{n_1} + \beta - \partial_{\tau_1} \left(\frac{\alpha}{2} \partial_{\tau_1} \right) \right) e_1^n. \quad (1.6)$$

Les conditions d'interface (1.5) (1.6) se traduisent en (x, y) et à savoir que ∂_{n_2} (resp. ∂_{n_1}) est remplacé par ∂_x (resp. $-\partial_x$), on obtient alors :

$$\left(-\partial_x + \beta - \partial_y \left(\frac{\alpha}{2} \partial_y \right) \right) e_1^{n+1} = \left(-\partial_x + \beta - \partial_y \left(\frac{\alpha}{2} \partial_y \right) \right) e_2^n \quad (1.7)$$

et

$$\left(\partial_x + \beta - \partial_y \left(\frac{\alpha}{2} \partial_y \right) \right) e_2^{n+1} = \left(\partial_x + \beta - \partial_y \left(\frac{\alpha}{2} \partial_y \right) \right) e_1^n. \quad (1.8)$$

Les conditions d'interface (1.7) (1.8) (1.3) (1.4), donnent :

$$\gamma_1^{n+1}(-\lambda^-(k) + \beta + \frac{\alpha}{2}k^2) = \gamma_2^n(-\lambda^+(k) + \beta + \frac{\alpha}{2}k^2) \quad (1.9)$$

$$\gamma_2^{n+1}(\lambda^+(k) + \beta + \frac{\alpha}{2}k^2) = \gamma_1^n(\lambda^-(k) + \beta + \frac{\alpha}{2}k^2). \quad (1.10)$$

Comme par définition $\rho(k; \alpha, \beta, \eta) = \frac{\gamma_1^{n+2}}{\gamma_1^n}$, les relations (1.9), (1.10) impliquent :

$$\rho(k; \alpha, \beta, \eta) = \left(\frac{-\lambda^+ + \beta + \frac{\alpha}{2}k^2}{-\lambda^- + \beta + \frac{\alpha}{2}k^2} \right) \left(\frac{\lambda^- + \beta + \frac{\alpha}{2}k^2}{\lambda^+ + \beta + \frac{\alpha}{2}k^2} \right).$$

Comme $-\lambda^+ = \lambda^-$, il s'en suit :

$$\rho(k; \alpha, \beta, \eta) = \left(\frac{\lambda^- + \beta + \frac{\alpha}{2}k^2}{\lambda^+ + \beta + \frac{\alpha}{2}k^2} \right)^2.$$

On remarque que pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\rho(k, \alpha, \beta, \eta) < 1$.

Par élimination on obtient

$$\gamma_1^{2n} = \rho(k; \alpha, \beta, \eta)^n \gamma_1^0,$$

donc

$$\hat{e}_1^{2n}(0, k) = \rho(k, \alpha, \beta, \eta)^n \hat{e}_1^0.$$

Un calcul analogue dans Ω_2 donne

$$\gamma_2^{2n} = \rho(k; \alpha, \beta, \eta)^n \gamma_2^0,$$

donc

$$\hat{e}_2^{2n}(0, k) = \rho(k; \alpha, \beta, \eta)^n \hat{e}_2^0.$$

Comme $\rho(k; \alpha, \beta, \eta) < 1$ alors $\rho(k; \alpha, \beta, \eta)^n$ converge vers zéro.

Donc l'algorithme de Schwarz converge.

Il est possible d'optimiser le choix du paramètre α, β afin de réduire au minimum le taux de convergence dans l'espace physique défini par $\max_k \rho(k; \alpha, \beta, \eta)$.

Les paramètres optimaux sont solutions du problème :

$$\min_{\alpha, \beta} \max_{|k| \leq \frac{\pi}{h}} \rho(k; \alpha, \beta, \eta) \quad (1.11)$$

où h est le pas du maillage dans la direction y .

La convergence dépend des paramètres du problème continu et aussi des paramètres discrets.

On rappelle un résultat dû à F.Nataf d'optimisation de condition d'interface pour un opérateur d'interface de type

$$B^i = \frac{\partial}{\partial n_i} + \frac{\tilde{\alpha}\tilde{\beta} + \eta}{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}} - \frac{1}{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}} \frac{\partial^2}{\partial \tau_i^2}.$$

où $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ sont deux paramètres positifs.

L'étude du problème de minimisation du taux de convergence de l'algorithme de Schwarz avec condition d'interface de type B^i permet de calculer les coefficients optimisés de l'opérateur B^i (notés $\tilde{\alpha}_{opt}, \tilde{\beta}_{opt}$) solution du problème (1.11).

Proposition 1 Soit $L = \eta - \Delta$

1. L'optimisation des coefficients de l'opérateur d'interface B^i donne :

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{opt}\tilde{\beta}_{opt} &= \lambda_m\lambda_M \\ \tilde{\alpha}_{opt} + \tilde{\beta}_{opt} &= \left(2\sqrt{\lambda_m\lambda_M}(\lambda_m + \lambda_M)\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

où

$$\lambda_m = \sqrt{\eta + k_{\min}^2}, \lambda_M = \sqrt{\eta + k_{\max}^2}$$

et

$$k_{\max} = \frac{\pi}{h}, k_{\min} = \frac{1}{a}$$

où a : est la longueur de l'interface commune entre les deux sous-domaines.

2. Comportement asymptotique des coefficients optimisés quand $h \rightarrow 0$

$$- \lambda_M \simeq \frac{\pi}{h}$$

-

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{opt} + \tilde{\beta}_{opt} &\simeq \left[2\sqrt{\lambda_m}\left(\frac{\pi}{h}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\pi}{h}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2}\lambda_m^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\pi}{h}\right)^{\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

$$- \tilde{\alpha}_{opt}\tilde{\beta}_{opt} \simeq \lambda_m \frac{\pi}{h}$$

La proposition 1 nous permet de déduire les paramètres optimaux du problème (1.11) avec condition d'interface de type (1.1). On note ces paramètres par $\alpha_{opt}, \beta_{opt}$, et ils sont donnés par :

$$\beta_{opt} = \frac{\tilde{\alpha}_{opt}\tilde{\beta}_{opt} + \eta}{\tilde{\alpha}_{opt} + \tilde{\beta}_{opt}} \quad (1.12)$$

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\tilde{\alpha}_{opt} + \tilde{\beta}_{opt}} \quad (1.13)$$

On peut aussi donner le comportement asymptotique des deux coefficients α_{opt} et β_{opt} , un simple calcul donne :

$$\alpha_{opt} = \frac{\sqrt{2}}{\lambda_m^{\frac{1}{4}} \pi^{\frac{3}{4}}} h^{\frac{3}{4}} \quad (1.14)$$

$$\beta_{opt} = \frac{\lambda_m^{\frac{3}{4}} \pi^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} h^{-\frac{1}{4}} \quad (1.15)$$

1.5.2 Cas d'une décomposition en N sous-domaines

Dans le cas général pour une décomposition du domaine en N sous-domaines (bandes), le taux de convergence est estimé en fonction du taux de convergence du cas à deux sous-domaines. La convergence a été prouvée en utilisant des techniques de langages formels dans [15] (F. Nataf et F. Nier, 1994).

Chapitre 2

Propriétés de la transformation de Mellin et les espaces de Sobolev à poids

Nous rappelons, en quelques points la théorie de V. Kondratiev qui permet d'étudier la régularité des problèmes elliptiques dans des domaines à coins. Après avoir introduit la transformée de Mellin et les espaces de Sobolev à poids, nous rappelons les liens avec les espaces de Sobolev. La transformation de Mellin permet une représentation très visuelle de la régularité H^s dans les domaines à coins. Cela nous conduira au chapitre suivant à la notion de type asymptotique et à l'introduction des espaces de Sobolev avec singularités prescrites qui interviennent dans la résolution des problèmes elliptiques.

2.1 Transformation de Mellin

La transformation de Mellin consiste à transporter tout ce qu'on sait faire sur le groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ avec la transformation de Fourier au groupe multiplicatif (\mathbb{R}_+^*, \cdot) . Cela peut se faire en pratique avec le changement de variable $r = e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$ dans la formule de transformation de Fourier :

$$F(f)(\tau) = \hat{f}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau t} f(t) dt$$

On pose $f(t) = u(e^{-t})$, alors on a :

$$M(u)(\tau) = \int_0^{+\infty} r^{i\tau} u(r) \frac{dr}{r} \quad (2.1)$$

La formule d'inversion de Fourier

$$F^{-1}(\hat{f})(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau t} \hat{f}(\tau) \frac{d\tau}{2\pi}$$

conduit à

$$M^{-1}(\hat{u})(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} r^{-i\tau} \hat{u}(\tau) \frac{d\tau}{2\pi}.$$

Notons que l'on peut introduire directement la transformée de Mellin sur (\mathbb{R}_+^*, \cdot) à l'aide des caractères $r \longrightarrow r^{-i\gamma}$ et la mesure de Haar $\frac{dr}{r}$.

2.1.1 Isométrie et Propriétés de M

• Isométrie

La transformation de Mellin est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dr}{r})$ dans $L^2(\mathbb{R}, \frac{d\tau}{2\pi})$.

Preuve 1 On sait que la transformation de Fourier est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}, dt)$ dans $L^2(\mathbb{R}, \frac{d\tau}{2\pi})$, donc la transformation de Mellin est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dr}{r})$ dans $L^2(\mathbb{R}, \frac{d\tau}{2\pi})$.

• Propriétés de M

1. Dans la transformation de Mellin la multiplication par un caractère $r^{i\alpha}$ revient à la translation en fréquence par $-\alpha$, c'est à dire :

$$M(r^{i\alpha}f)(\tau) = M(f)(\tau + \alpha) \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Cette formule est encore valable pour α complexe.

2. Formules de dérivation pour la transformation de Mellin :

$$M(ir \partial_r f)(\tau) = \tau M(f)(\tau)$$

$$M(i \ln(r) f)(\tau) = \partial_\tau M(f)(\tau)$$

3. Formules de dilatation :

$$M(f(r^c))(\tau) = c^{-1} M(f)(c^{-1}\tau), c \in \mathbb{R}_+^*$$

$$M(f(cr))(\tau) = c^{-i\tau} M(f)(\tau), c \in \mathbb{R}_+^*$$

4. Produit de convolution :

On définit le produit de convolution dans un groupe multiplicatif par :

$$f * g(r) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{r}{r'}\right) g(r') \frac{dr'}{r'}$$

Alors on a :

$$M(f * g) = M(f)M(g)$$

5. $M(fg) = M(f) *_{2\pi} M(g)$

Preuve 2 1. On travaille avec des fonctions de classe C^∞ et à support compact dans $(0, +\infty)$ et on prolonge les identités par densité.

En utilisant la définition intégrale de la transformation de Mellin (2.1) on obtient la 1^{ère} égalité c'est à dire :

$$M(r^{i\alpha}f)(\tau) = \int_0^{+\infty} r^{i(\alpha+\tau)} f(r) \frac{dr}{r} = M(f)(\tau + \alpha)$$

2. • D'après (2.1) on a :

$$M(ir\partial_r f)(\tau) = \int_0^{+\infty} ir^{i\tau} r \partial_r f(r) \frac{dr}{r} = i \int_0^{+\infty} r^{i\tau} \partial_r f(r) dr$$

Par intégration par partie on obtient : $M(ir\partial_r f)(\tau) = \tau M(f)(\tau)$, pour toute fonction f de classe C^∞ et à support compact dans $(0, +\infty)$

- D'après (2.1) on a

$$M(i \ln(r) f)(\tau) = \int_0^{+\infty} r^{i\tau} i \ln(r) f(r) \frac{dr}{r},$$

il suffit de remarquer que

$$\partial_\tau r^{i\tau} = i \ln(r) r^{i\tau}$$

alors on obtient :

$$\begin{aligned} M(i \ln(r) f)(\tau) &= \int_0^{+\infty} \partial_\tau r^{i\tau} f(r) \frac{dr}{r} \\ &= \partial_\tau \left(\int_0^{+\infty} r^{i\tau} f(r) \frac{dr}{r} \right). \end{aligned}$$

Donc $M(i \ln(r) f)(\tau) = \partial_\tau M(f)(\tau)$.

3. • Pour montrer la formule de dilatation il suffit de poser le changement de variable $r' = r^c$, Ce qui donne $\frac{dr'}{r'} = c \frac{dr}{r}$
Donc d'après (2.1) on a :

$$M(f(r^c))(\tau) = \int_0^{+\infty} r^{i\tau} f(r^c) \frac{dr}{r} = \int_0^{+\infty} r'^{\frac{i\tau}{c}} f(r') \frac{1}{c} \frac{dr'}{r'} = c^{-1} M(f)\left(\frac{\tau}{c}\right)$$

• La deuxième formule de dilatation se démontre en posant comme changement de variable $r' = cr$ on obtient facilement le résultat.

4. D'après (2.1) on peut écrire :

$$M(f * g)(\tau) = \int_0^{+\infty} r^{i\tau} (f * g)(r) \frac{dr}{r}, \quad (2.2)$$

en utilisant la définition du produit de convolution

$$(f * g)(r) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{r}{r'}\right) g(r') \frac{dr'}{r'},$$

donc l'égalité (2.2) est équivalente à :

$$M(f * g)(\tau) = \iint_{(0, +\infty)^2} r^{i\tau} f\left(\frac{r}{r'}\right) g(r') \frac{dr'}{r'} \frac{dr}{r}. \quad (2.3)$$

On pose le changement de variable $y = \frac{r}{r'}$ alors on a : $\frac{dy}{y} = \frac{dr}{r}$

Donc avec ce changement de variable et l'égalité (2.3) on obtient le résultat i.e :

$$M(f * g)(\tau) = \left(\int_0^{+\infty} r'^{i\tau} g(r') \frac{dr'}{r'} \right) \left(\int_0^{+\infty} y^{i\tau} g(y) \frac{dy}{y} \right) = M(g)(\tau) M(f)(\tau)$$

5. Par un calcul analogue à celui du produit de convolution on montre que

$$M(fg) = M(f) *_{2\pi} M(g)$$

2.2 Les espaces à poids en dimension un

On se propose de déterminer les isométries et les propriétés de la transformation de Mellin dans des espaces à poids qui seront définis ultérieurement. Comme la transformation de Mellin n'est autre que la transformation de Fourier avec un petit changement ($r = e^{-t}$), nous sommes ramenés à chercher les propriétés de la transformation de Fourier dans des espaces bien définis puis les traduire en Mellin.

2.2.1 Transformation de Fourier à poids exponentiel

Définition 1

$$L^{2,\gamma+\frac{1}{2}} := L^2(\mathbb{R}, e^{2\gamma t} dt) = \{f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}), \text{ tel que } \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 e^{2\gamma t} dt < \infty\} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{H}^2(\mathbb{R} + i[\gamma, \gamma']) := \left\{ u; u \text{ holomorphe dans } \gamma < \Im(z) < \gamma', \begin{array}{l} u|_{\Im(z)=\gamma} \in L^2(\mathbb{R} + i\gamma) \\ u|_{\Im(z)=\gamma'} \in L^2(\mathbb{R} + i\gamma') \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

Propriété 1 La transformation de Fourier notée (F) est une isométrie de $L^{2,\gamma+\frac{1}{2}}$ dans $L^2(\mathbb{R} + i\gamma, \frac{d\tau}{2\pi})$.

Preuve 3 Soit $f \in L^{2,\gamma+\frac{1}{2}} \iff e^{\gamma t} f \in L^2(\mathbb{R}, dt)$ (ceci est clair d'après 2.4), alors on a

$$\|f\|_{L^{2,\gamma+\frac{1}{2}}}^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 e^{2\gamma t} dt = \|e^{\gamma \cdot} f\|_{L^2(\mathbb{R}, dt)}^2. \quad (2.6)$$

En utilisant le fait que la transformée de Fourier est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}, dt)$ dans $L^2(\mathbb{R}, \frac{d\tau}{2\pi})$, alors l'égalité (2.6) devient :

$$\|f\|_{L^{2,\gamma+\frac{1}{2}}} = \|e^{\gamma \cdot} f\|_{L^2(\mathbb{R}, dt)} = \|\widehat{e^{\gamma \cdot} f}\|_{L^2(\mathbb{R}, \frac{d\tau}{2\pi})}. \quad (2.7)$$

Avec un simple calcul de transformée de Fourier on montre que :

$$(\widehat{e^{\gamma \cdot} f})(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\tau t} e^{\gamma t} f(t) dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-i t(\tau + i\gamma)} f(t) dt, \quad (2.8)$$

d'où

$$(\widehat{e^{\gamma \cdot} f})(\tau) = \hat{f}(\tau + i\gamma). \quad (2.9)$$

On peut remarquer que l'égalité (2.9) revient à une translation en fréquence par $(i\gamma)$. En utilisant les deux identités (2.7) et (2.9) on aboutit à :

$$\|f\|_{L^{2,\gamma+\frac{1}{2}}} = \|\hat{f}(\cdot + i\gamma)\|_{L^2(\mathbb{R}, \frac{d\tau}{2\pi})}$$

Donc la transformation de Fourier est une isométrie de $L^{2,\gamma+\frac{1}{2}}$ dans $L^2(\mathbb{R} + i\gamma, \frac{d\tau}{2\pi})$.

Propriété 2 1. La transformation de Fourier est une isométrie de $L^{2,\gamma+\frac{1}{2}} \cap L^{2,\gamma'+\frac{1}{2}}$ dans $\mathbf{H}^2(\mathbb{R} + i[\gamma, \gamma'])$

2. Inégalité d'interpolation entre les espaces $L^2(\mathbb{R} + i\gamma)$

Soit $u \in L^2(\mathbb{R} + i\gamma) \cap L^2(\mathbb{R} + i\gamma')$ alors $u \in L^2(\mathbb{R} + i\gamma'')$, $\forall \gamma''$, $\gamma \leq \gamma'' \leq \gamma'$, de plus on a l'inégalité suivante :

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R} + i\gamma'')} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R} + i\gamma)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R} + i\gamma')}. \quad (2.10)$$

En fait l'inégalité (2.10) n'est pas optimale, on peut avoir mieux à partir du théorème de Paley Wiener. Avant d'introduire le théorème de Paley Wiener nous rappelons, en quelques lignes, les espaces de Hardy.

On note par Γ une courbe rectifiable, orientée et séparant le plan complexe en deux composantes connexes Ω_+ et Ω_- , il est possible de définir l'espace de Hardy $\mathbf{H}^2(\Omega_-)$ des fonctions analytiques dans Ω_- et ayant des valeurs au bord dans $L^2(\Gamma)$. Les fonctions de $\mathbf{H}^2(\Omega_-)$ sont caractérisées par leurs valeurs au bord de sorte que $\mathbf{H}^2(\Omega_-)$ peut être assimilé à un sous-espace de $L^2(\Gamma)$. De la même façon on définit $\mathbf{H}^2(\Omega_+)$.

Théorème 1 (Théorème de Paley Wiener)

Soient les espaces $\mathbf{H}^2(\mathbb{C}_+)$ et $L^2(\mathbb{R}_-, dt)$ définis par :

$$\mathbf{H}^2(\mathbb{C}_+) = \left\{ u; u \text{ holomorphe dans } \{z; \Im(z) > 0\}, u|_{\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R}, \frac{dt}{2\pi}) \right\}$$

$$L^2(\mathbb{R}_-, dt) = \left\{ u; u \in L^2(\mathbb{R}, dt), u|_{\mathbb{R}_+} = 0 \right\}$$

alors la transformation de Fourier est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}_-, dt)$ dans $\mathbf{H}^2(\mathbb{C}_+)$

Preuve 4 Voir Rudin (tome 4) pour plus de détail.

À partir du théorème de Paley Wiener on peut déduire les deux corollaires 1 et 2 qui définissent des isométries réalisées par la transformée de Fourier entre les espaces de Sobolev à poids exponentiel dans des espaces de Hardy.

Corollaire 1 On a les isométries suivantes :

$$F : L^2(\mathbb{R}_-, e^{2\gamma t} dt) \longrightarrow \mathbf{H}^2(\mathbb{C}_+ + i\gamma) \quad (2.11)$$

$$F : L^2(\mathbb{R}_+, e^{2\gamma t} dt) \longrightarrow \mathbf{H}^2(\mathbb{C}_- + i\gamma) \quad (2.12)$$

Corollaire 2 Pour $\gamma \leq \gamma'$ les transformations de Fourier :

$$F : L^{2,\gamma+\frac{1}{2}} \cap L^{2,\gamma'+\frac{1}{2}} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}_-, e^{2\gamma t} dt) \oplus L^2(\mathbb{R}_+, e^{2\gamma' t} dt) \quad (2.13)$$

$$F : L^{2,\gamma+\frac{1}{2}} \cap L^{2,\gamma'+\frac{1}{2}} \longrightarrow \mathbf{H}^2(\mathbb{C}_+ + i\gamma) \oplus \mathbf{H}^2(\mathbb{C}_- + i\gamma) \quad (2.14)$$

sont des isométries

2.2.2 Traduction des propriétés de la transformation de Fourier en transformation de Mellin

Avec le changement de variable $r = e^{-t}$, on peut déduire les isométries réalisées par la transformation de Mellin à partir de celles de la transformation de Fourier.

On remarque que le changement de variable $r = e^{-t}$ envoie \mathbb{R}_- en $[1, +\infty[$ et \mathbb{R}_+ en $]0, 1]$.

Propriété 3 : Les transformations de Mellin définies par :

1.

$$M : L^2(\mathbb{R}_+^*, r^{-2\gamma} \frac{dr}{r}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R} + i\gamma, \frac{d\tau}{2\pi}) \quad (2.15)$$

2.

$$M : L^2([0, 1], r^{-2\gamma} \frac{dr}{r}) \longrightarrow \mathbf{H}^2(\mathbb{C}_- + i\gamma, \frac{d\tau}{2\pi}) \quad (2.16)$$

3.

$$M : L^2([1, +\infty[, r^{-2\gamma} \frac{dr}{r}) \longrightarrow \mathbf{H}^2(\mathbb{C}_+ + i\gamma, \frac{d\tau}{2\pi}) \quad (2.17)$$

4. $\forall \gamma \leq \gamma'$ on a :

$$M : L^2(\mathbb{R}_+^*, r^{-2\gamma} \frac{dr}{r}) \cap L^2(\mathbb{R}_+^*, r^{-2\gamma'} \frac{dr}{r}) \longrightarrow \mathbf{H}^2(\mathbb{C}_+ + i\gamma, \frac{d\tau}{2\pi}) \oplus \mathbf{H}^2(\mathbb{C}_- + i\gamma', \frac{d\tau}{2\pi}) \quad (2.18)$$

5.

$$M : L^2(\mathbb{R}_+^*, r^{-2\gamma} \frac{dr}{r}) \cap L^2(\mathbb{R}_+^*, r^{-2\gamma'} \frac{dr}{r}) \longrightarrow \mathbf{H}^2(\mathbb{R} + i[\gamma, \gamma']) \quad (2.19)$$

sont des isométries.

Preuve 5 – L'isométrie (2.15) se déduit facilement à partir de la propriété 1.

– Les autres propriétés de Mellin sont des conséquences des corollaires 1 et 2.

2.3 Les espaces à poids en dimension n

Soit $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \omega$ où ω est un ouvert régulier de S^{n-1}
On note par $d\theta$ un élément de surface sur ω

Définition 2 On définit les espaces $L^2(\Omega, dx)$ et $L^{2,\gamma}$ comme suit :

$$L^2(\Omega, dx) = L^2(\mathbb{R}_+^* \times \omega, r^{n-1} dr d\theta) = L^2(\mathbb{R}_+^* \times \omega, r^n \frac{dr}{r} d\theta)$$

$$L^{2,\gamma} = L^2(\Omega, |x|^{-2\gamma} dx) = L^2(\mathbb{R}_+^* \times \omega, r^{-2\gamma} r^n \frac{dr}{r} d\theta) = L^2(\mathbb{R}_+^* \times \omega, r^{2(-\gamma + \frac{n}{2})} \frac{dr}{r} d\theta)$$

Proposition 2 En toute dimension on a $L^{2,0} = L^2(\Omega, dx)$

Preuve 6 Pour $n = 1$ (en dimension 1) on a par définition : $L^{2,\gamma+\frac{1}{2}} = L^2(\mathbb{R}_+^*, r^{-2\gamma} \frac{dr}{r})$, donc pour $\gamma = \frac{-1}{2}$ on obtient le résultat $L^{2,0} = L^2(\mathbb{R}_+^*, dr)$.

Pour $n > 1$, d'après la définition des espaces $L^{2,\gamma}$ on a $L^{2,\gamma} = L^2(\mathbb{R}_+^* \times \omega, r^{2(-\gamma + \frac{n}{2})} \frac{dr}{r} d\theta)$ donc pour $\gamma = 0$ on a :

$$L^{2,0} = L^2(\mathbb{R}_+^* \times \omega, r^n \frac{dr}{r} d\theta) = L^2(\Omega, dx).$$

Donc en toute dimension $L^{2,0} = L^2(\Omega, dx)$.

2.3.1 Propriétés de la transformation de Mellin en dimension n

Les transformations de Mellin définies par

1.

$$M : L^{2,\gamma} \longrightarrow L^2\left(\mathbb{R} - i(-\gamma + \frac{n}{2}), \frac{d\tau}{2\pi}; L^2(\omega)\right),$$

2.

$$M : L^2\left(\Omega \cap (r \leq 1), |x|^{-2\gamma} dx\right) \longrightarrow \mathbf{H}^2\left(\mathbb{C}_- - i(-\gamma + \frac{n}{2}), \frac{d\tau}{2\pi}; L^2(\omega)\right),$$

3.

$$M : L^2\left(\Omega \cap (r \geq 1), |x|^{-2\gamma} dx\right) \longrightarrow \mathbf{H}^2\left(\mathbb{C}_+ - i(-\gamma + \frac{n}{2}), \frac{d\tau}{2\pi}; L^2(\omega)\right),$$

4. $\forall \gamma \leq \gamma'$ on a

$$M : L^2\left(\Omega, |x|^{-2\gamma} dx\right) \cap L^2\left(\Omega, |x|^{-2\gamma'} dx\right) \longrightarrow \mathbf{H}^2\left(\mathbb{C}_+ - i(-\gamma + \frac{n}{2}); L^2(\omega)\right) \oplus \mathbf{H}^2\left(\mathbb{C}_- - i(-\gamma' + \frac{n}{2}); L^2(\omega)\right),$$

sont des isométries.

Preuve 7 1. On a

$$\begin{aligned} L^{2,\gamma} &= L^2(\Omega, |x|^{-2\gamma} dx) \\ &= L^2(\mathbb{R}_+^* \times \omega, r^{-2\gamma} r^n \frac{dr}{r} d\theta) \\ &= L^2(\mathbb{R}_+^* \times \omega, r^{-2(\gamma - \frac{n}{2})} \frac{dr}{r} d\theta) \end{aligned}$$

Donc d'après (2.15), on déduit que la transformation de Mellin réalise une isométrie de $L^2(\mathbb{R}_+^* \times \omega, r^{-2(\gamma - \frac{n}{2})} \frac{dr}{r} d\theta)$ dans $L^2\left(\mathbb{R} - i(-\gamma + \frac{n}{2}), \frac{d\tau}{2\pi}; L^2(\omega)\right)$.

2. Pour la deuxième isométrie, il suffit d'écrire :

$$L^2(\Omega \cap (r \leq 1), |x|^{-2\gamma} dx) = L^2([0, 1] \times \omega, r^{-2(\gamma - \frac{n}{2})} \frac{dr}{r} d\theta) \quad (2.20)$$

donc d'après (2.16) et (2.20), la transformation de Mellin est une isométrie de

$$L^2(\Omega \cap (r \leq 1), |x|^{-2\gamma} dx) \text{ dans } \mathbf{H}^2\left(\mathbb{C}_- - i(-\gamma + \frac{n}{2}), \frac{d\tau}{2\pi}; L^2(\omega)\right).$$

3. De la même manière que précédemment on a

$$L^2(\Omega \cap (r \geq 1), |x|^{-2\gamma} dx) = L^2([1, \infty[\times \omega, r^{-2(\gamma - \frac{n}{2})} \frac{dr}{r} d\theta), \quad (2.21)$$

donc d'après (2.17) et (2.21) M est une isométrie de

$$L^2(\Omega \cap (r \geq 1), |x|^{-2\gamma} dx) \text{ dans } \mathbf{H}^2\left(\mathbb{C}_+ - i(-\gamma + \frac{n}{2}), \frac{d\tau}{2\pi}; L^2(\omega)\right).$$

4. On procède comme précédemment et on utilise (2.17), on prouve que M est une isométrie de $L^2(\Omega, |x|^{-2\gamma} dx) \cap L^2(\Omega, |x|^{-2\gamma'} dx)$ dans $\mathbf{H}^2\left(\mathbb{C}_+ - i(-\gamma + \frac{n}{2}); L^2(\omega)\right) \oplus \mathbf{H}^2\left(\mathbb{C}_- - i(-\gamma' + \frac{n}{2}); L^2(\omega)\right)$.

2.3.2 Les espaces de Sobolev à poids : $H^{s,\gamma}$

Définition 3 Soient $s \in \mathbb{N}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$

On désigne par $H^{s,\gamma}$ l'espace :

$$H^{s,\gamma} := \{u \in L_{loc}^2(\Omega), (r\partial_r)^{\alpha_1} (\partial_\theta)^{\alpha_2} u \in L^2(\Omega, r^{-2\gamma} dx) = L^{2,\gamma}; \alpha_1 + |\alpha_2| \leq s\}.$$

C'est un espace de Hilbert muni de la norme donnée par

$$\|u\|_{H^{s,\gamma}}^2 = \sum_{\alpha_1 + |\alpha_2| \leq s} \|(r\partial_r)^{\alpha_1} \partial_\theta^{\alpha_2} u\|_{L^{2,\gamma}}^2.$$

Pour $s \in \mathbb{R}_+$, les espaces $H^{s,\gamma}$ sont définis à partir des s entiers par interpolation à γ fixé.

Lemme 1 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega = \mathbb{R} \times \omega$, où ω est un ouvert régulier de S^{n-1} et $s \in \mathbb{N}$.

Alors

$$H^{s, \frac{n}{2}} = \{u(\ln(r), \theta), u \in H^s(\mathbb{R} \times \omega)\}.$$

Preuve 8 Soit $u \in H^{s, \frac{n}{2}}$, comme $s \in \mathbb{N}$ donc d'après la définition des espaces $H^{s, \gamma}$ on a

$$\begin{aligned} u \in H^{s, \frac{n}{2}} &\iff (r\partial_r)^{\alpha_1} \partial_\theta^{\alpha_2} u \in L^2(\Omega, r^{-n} r^{n-1} dr d\theta), \alpha_1 + |\alpha_2| \leq s \\ &\iff (r\partial_r)^{\alpha_1} \partial_\theta^{\alpha_2} u \in L^2(\mathbb{R}_+^* \times \omega, \frac{dr}{r} d\theta), \alpha_1 + |\alpha_2| \leq s \end{aligned}$$

On pose $r = e^t, \hat{u}(t, \theta) = u(e^t, \theta)$ alors

$$\begin{aligned} u \in H^{s, \frac{n}{2}} &\iff (\partial_t)^{\alpha_1} \partial_\theta^{\alpha_2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R} \times \omega, dt d\theta), \alpha_1 + |\alpha_2| \leq s \\ &\iff \hat{u} \in H^s(\Omega) \end{aligned}$$

D'après le Lemme 1, toute fonction u dans $H^{s, \frac{n}{2}}$ s'écrit sous la forme $u(r, \theta) = \hat{u}(\ln(r), \theta), \hat{u} \in H^s(\Omega)$. On se met dans la situation d'une variété à bord régulier, donc on pourra déduire les propriétés de l'opérateur de trace sur les espaces de Sobolev $H^s(\Omega), s > \frac{1}{2}$. Ainsi nous donnerons une caractérisation des traces des fonctions dans $H^{s, \gamma}(\Omega)$.

Lemme 2 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\partial\Omega = \mathbb{R} \times \partial\omega$ où ω une variété à bord $(\partial\omega)$ régulier.

Soit l'opérateur de trace défini par $\gamma_{\partial\Omega} : \Omega \longrightarrow \partial\Omega$

Alors $\gamma_{\partial\Omega}$ est bien défini et surjectif de : $H^{s, \gamma}$ dans $H^{s-\frac{1}{2}, \gamma-\frac{1}{2}}$ dès que $s > \frac{1}{2}$

Remarque 2 1. On sait que la transformation de Mellin est une isométrie de

$$L^{2, \gamma} \text{ dans } L^2(\mathbb{R} - i(-\gamma + \frac{n}{2}), \frac{d\tau}{2\pi}; L^2(\omega))$$

alors on peut donner une autre caractérisation des espaces à poids $H^{s, \gamma}$, en effet pour $u \in H^{s, \gamma}$ on a :

$$(r\partial_r)^{\alpha_1} (\partial_\theta)^{\alpha_2} u \in L^{2, \gamma} \iff \left(\frac{z}{i}\right)^{\alpha_1} (\partial_\theta)^{\alpha_2} M(u)(z, \theta) \in L^2(\mathbb{R} - i(-\gamma + \frac{n}{2}), \frac{d\tau}{2\pi}; L^2(\omega))$$

On note que z s'écrit sous la forme $z = \tau - i(-\gamma + \frac{n}{2}), \tau \in \mathbb{R}$.

Donc

$$u \in H^{s, \gamma} \iff \left(\frac{z}{i}\right)^{\alpha_1} (\partial_\theta)^{\alpha_2} M(u)(z, \theta) \in L^2(\mathbb{R} - i(-\gamma + \frac{n}{2}), \frac{d\tau}{2\pi}; L^2(\omega))$$

Nous généralisons cette caractérisation ci-dessous.

Proposition 3 Soient $s \in \mathbb{N}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ alors on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} u \in H^{s, \gamma} &\iff r^{-\gamma+|\alpha|} D_x^\alpha u \in L^2(\Omega, dx), \forall \alpha, |\alpha| \leq s \\ &\iff r^{|\alpha|} D_x^\alpha u \in L^2(\Omega, |x|^{-2\gamma} dx) = L^{2, \gamma}, \forall \alpha, |\alpha| \leq s \end{aligned}$$

Preuve 9 En écrivant

$$D_x = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r\partial_r \\ \partial_\theta \end{pmatrix}$$

et en utilisant la définition de l'espace $H^{s,\gamma}$ on a :

$$u \in H^{s,\gamma} \iff r^{|\alpha|} D_x^\alpha u \in L^2(\Omega, |x|^{-2\gamma} dx) = L^{2,\gamma}, \forall \alpha, |\alpha| \leq s$$

Proposition 4 Soient $s \in \mathbb{R}_+$ et $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \omega$, où ω est un ouvert régulier de S^{n-1} . Alors on a

$$u \in H^{s,\gamma} \iff \exists \tilde{u} \in H^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+^* \times S^{n-1}) \text{ tel que } \tilde{u}|_\Omega = u.$$

Si de plus le support de u est inclus dans l'ensemble $\{x, \frac{x}{|x|} \in K \subset \subset \omega\}$ où K est un compact alors $u = \tilde{u}$.

Preuve 10 Comme la multiplication par r^γ définit un isomorphisme de H^{s,γ_0} dans $H^{s,\gamma_0+\gamma}$ il suffit de considérer le cas $\gamma = \frac{n}{2}$. Nous nous restreignons d'abord à $s \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u \in H^{s,\frac{n}{2}}(\Omega) &\iff r^{|\alpha|} D_x^\alpha u \in L^2(\Omega, |x|^{-n} dx), \forall \alpha, |\alpha| \leq s \\ &\iff (r\partial_r)^{\alpha_1} \partial_\theta^{\alpha_2} u \in L^2(\Omega, r^{-n} dx), \alpha_1 + |\alpha_2| \leq s. \end{aligned}$$

Donc

$$(r\partial_r)^{\alpha_1} \partial_\theta^{\alpha_2} u \in L^2(\mathbb{R}_+^* \times \omega, \frac{dr}{r} d\theta), \alpha_1 + |\alpha_2| \leq s.$$

On pose $r = e^{-t}$ et $\hat{u}(t, \theta) = u(e^{-t}, \theta)$, alors

$$\begin{aligned} u \in H^{s,\frac{n}{2}}(\Omega) &\iff \partial_t^{\alpha_1} \partial_\theta^{\alpha_2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R} \times \omega, dt d\theta), \alpha_1 + |\alpha_2| \leq s \\ &\iff \hat{u} \in H^s(\mathbb{R} \times \omega). \end{aligned}$$

Comme ω est un ouvert régulier de S^{n-1} , on utilise un opérateur de prolongement en θ qui permet de trouver $\tilde{u} \in H^s(\mathbb{R} \times S^{n-1})$ telle que $\tilde{u}|_{\mathbb{R} \times \omega} = \hat{u}$. En revenant aux variables (r, θ) , u est la restriction à $\mathbb{R}_+^* \times \omega$ d'un élément de $H^{s,\frac{n}{2}}(\mathbb{R}_+^* \times S^{n-1})$.

L'opérateur de prolongement peut être choisi pour être continu de $H^s(\mathbb{R} \times \omega)$ dans $H^s(\mathbb{R} \times S^{n-1})$ pour s entier inférieur ou égal à $N \in \mathbb{N}$ fixé. Par interpolation cela définit un opérateur de prolongement pour $s \in [0, N]$ et le résultat est valable pour s non entier.

D'après la proposition 4, pour caractériser les espaces $H^{s,\gamma}$ il suffit de caractériser les espaces $H^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+^* \times S^{n-1})$. Ainsi nous donnerons au théorème 2 une caractérisation des espaces $H^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+^* \times \omega)$ pour $s \in \mathbb{R}_+$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

Caractérisation des espaces $H^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+^* \times S^{n-1})$

On donne ici une caractérisation des espaces de Sobolev $H^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+^* \times S^{n-1})$ avec la transformée de Mellin.

On revient sur le cas $s \in \mathbb{N}$. L'appartenance de u à $H^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+^* \times S^{n-1})$ se traduit par

$$\sum_{\alpha_1 + |\alpha_2| \leq s} \|z^{\alpha_1} \partial_\theta^{\alpha_2} M(u)\|_{L^2(\mathbb{R} + i(\gamma - \frac{n}{2}); L^2(S^{n-1}))}^2 < \infty.$$

En introduisant l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ_S sur S^{n-1} et en posant $\Lambda = (1 - \Delta_S)^{\frac{1}{2}}$ on a alors

$$u \in H^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+^* \times S^{n-1}) \iff (1 + \Lambda + |z|)^s M(u) \in L^2(\mathbb{R} + i(\gamma - \frac{n}{2}); L^2(S^{n-1})).$$

Cette caractérisation est alors valable pour $s \in \mathbb{R}_+$ par interpolation. Comme la propriété $\text{supp}(u) \subset \{r \leq 1\}$ se traduit par une propriété d'holomorphicité dans $\{\Im z < \gamma - \frac{n}{2}\}$ il est préférable de remplacer le poids $(\Lambda + |z|)^s$ par une quantité équivalente holomorphe par rapport à z dans $\{\Im z < \gamma - \frac{n}{2}\}$.

Notons que l'opérateur $\Lambda = (1 - \Delta_S)^{\frac{1}{2}}$ est un opérateur auto-adjoint minoré par 1 et que le calcul fonctionnel auto-adjoint ramène le problème au cas où Λ est un scalaire positif (diagonaliser Δ_S sur la base des harmoniques sphériques). On remarque que pour $\Im z < \gamma - \frac{n}{2}$, on a en posant $Z = i(z - i(\gamma - \frac{n}{2}))$

$$\Re Z = \Re[i(z - i(\gamma - \frac{n}{2}))] = -\Im[z - i(\gamma - \frac{n}{2})] > 0.$$

Pour $\lambda \geq 1$ la quantité $(\lambda + i(z - i(\gamma - \frac{n}{2})))$ a donc une partie réelle supérieure ou égale à 1. On peut choisir sur le demi-plan $\{\Re \zeta \leq 1\}$ une détermination holomorphe du logarithme et donc une détermination holomorphe de ζ^s pour tout $s \in \mathbb{R}$ qui vérifie $|\zeta^s| = |\zeta|^s$. Il reste à vérifier si les quantités $\lambda + |z|$ et $|\lambda + i(z - i(\gamma - \frac{n}{2}))|$ sont bien équivalentes sur $\{\Im z < \gamma - \frac{n}{2}\}$. En posant $i(z - i(\gamma - \frac{n}{2})) = Z = a + ib$ avec $a > 0$, on obtient

$$2\lambda^2 + 2|Z|^2 \geq |\lambda + Z|^2 \geq |\lambda + a + ib|^2 \geq \lambda^2 + a^2 + b^2 = \lambda^2 + |Z|^2.$$

On conclut alors par les équivalences pour $s \in \mathbb{R}_+$ et $\gamma \in \mathbb{R}$

$$u \in H^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+^* \times S^{n-1}) \iff (\Lambda + i(z - i(\gamma - \frac{n}{2})))^s M(u) \in L^2(\mathbb{R} + i(\gamma - \frac{n}{2}); L^2(S^{n-1}))$$

et

$$\begin{aligned} u \in H^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+^* \times S^{n-1}) \quad , \quad \text{supp } u \subset \{r \leq 1\} \\ \iff \\ (\Lambda + i(z - i(\gamma - \frac{n}{2})))^s M(u) \in \mathbf{H}^2(\mathbb{C}_- + i(\gamma - \frac{n}{2}); L^2(S^{n-1})). \end{aligned}$$

Les résultats obtenus dans ce paragraphe se résument dans le théorème suivant.

Théorème 2 Pour $s \in \mathbb{R}_+$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ on a les équivalences suivantes

- 1 $u \in H^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+^* \times \omega)$ si et seulement si sa transformée de Mellin Mu est la restriction à $[\mathbb{R} + i(\gamma - \frac{n}{2})] \times \omega$ d'une fonction $v(z, \theta)$ sur $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ vérifiant

$$\left(\Lambda + i(z - i(\gamma - \frac{n}{2}))\right)^s v \in L^2(\mathbb{R} + i(\gamma - \frac{n}{2}); L^2(S^{n-1})).$$

2 $u \in H^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+^* \times \omega)$ avec $\text{supp } u \subset \{r \leq 1\}$ si et seulement si sa transformée de Mellin Mu est la restriction à $[\mathbb{R} + i(\gamma - \frac{n}{2})] \times \omega$ d'une fonction $v(z, \theta)$ sur $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ vérifiant

$$\left(\Lambda + i\left(z - i\left(\gamma - \frac{n}{2}\right)\right)\right)^s v \in \mathbf{H}^2(\mathbb{C}_- + i(\gamma - \frac{n}{2}); L^2(S^{n-1})).$$

2.4 Lien avec les espaces de Sobolev usuels

On travaille toujours avec $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \omega$ où ω est un ouvert régulier de S^{n-1} . Nous nous intéressons essentiellement au comportement des fonctions au voisinage du coin. Nous traiterons donc des fonctions à support dans $\{r \leq 1\}$. Nous allons décrire la régularité H^s , $s \geq 0$ usuelle en terme de transformée de Mellin puis faire le lien avec les espaces de Sobolev à poids introduits précédemment. Nous allons voir que la transformée de Mellin d'une fonction H^s à support dans $\{r \leq 1\}$ admet un prolongement méromorphe dans un demi-plan complexe à valeur L^2 en angle et dont les pôles correspondent au développement de Taylor de la fonction au voisinage de 0. On traitera en premier lieu le cas de la dimension un, puis on généralisera les résultats en toute dimension.

Avant cela nous rappelons une version des inégalités de Hardy tirée de [3] (Appendice A, Théorème A.A.7).

Lemme 3 Pour $s \in (0, 1)$ (en excluant le cas $s = \frac{1}{2}$ pour $n = 1$) toute fonction dans $H^s(\Omega)$ à support dans $\{r \leq r_1\}$ (avec la condition $u(0) = 0$ si $n = 1$ et $s > \frac{1}{2}$) appartient à $L^{2,s}(\Omega)$ et il existe une constante C_{n,s,r_1} telle que

$$\forall u \in H^s(\Omega), \text{supp } u \subset \{r \leq r_1\}, \|u\|_{L^{2,s}(\Omega)} \leq C_{n,s,r_1} \|u\|_{H^s},$$

avec la condition $u(0) = 0$ si $s > \frac{1}{2}$ et en excluant $s = \frac{1}{2}$ pour le cas $n = 1$.

Avant de donner la preuve du Lemme 3 (tirée de M. Dauge pp 218-219), nous rappelons la définition des espaces H^s pour tout s .

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , on note par $\sigma = s - m$, où m désigne la partie entière de s , avec $0 < \sigma < 1$.

On définit

$$Q_\sigma[u](x, y) = \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\sigma + \frac{n}{2}}},$$

alors les espaces H^s sont définis par :

1. H^m est l'espace des fonctions u définies dans Ω tel que

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

2. H^s est l'espace des fonctions définies dans Ω tel que

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \|u\|_{H^m} + \left\{ \sum_{|\alpha|=m} \iint_{\Omega \times \Omega} |Q_\sigma[D^\alpha u](x, y)|^2 dx dy \right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

Preuve 11 On note par $\Omega_1 = \Omega \cap B(0, r_1)$, pour simplifier les calculs on choisit $r_1 = 1$.

On a $C^\infty(\Omega_1)$ est dense dans $H^s(\Omega_1)$. Ainsi, il suffit de montrer l'inégalité pour les fonctions dans $C^\infty(\Omega_1)$, puis on prolonge l'inégalité par densité.

Soit $u \in C^\infty(\Omega_1)$. On distinguera dans la suite le cas de la dimension 1 et le cas où $n > 1$.

– Si $n = 1$ et $s > \frac{1}{2}$, et si de plus $u(0) = 0$, alors $r^{-s}u \in L^2(\Omega_1)$, donc $u \in L^{2,s}$.

– On définit $\tilde{\Omega} = \{(x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_1, |y| \leq |x|\}$

On remarque que

$$\|Q_s[u]\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \|u\|_{H^s(\Omega)}, \quad (2.22)$$

pour $(x, y) \in \tilde{\Omega}$, on a $|x - y| \leq 2|x|$, d'où

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x|^{s+\frac{n}{2}}} \leq 2^{s+\frac{n}{2}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{s+\frac{n}{2}}}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x|^{s+\frac{n}{2}}} \leq 2^{s+\frac{n}{2}} Q_s[u](x, y)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left| \frac{u(x)}{|x|^{s+\frac{n}{2}}} - \frac{u(y)}{|x|^{s+\frac{n}{2}}} \right| \leq 2^{s+\frac{n}{2}} Q_s[u](x, y) \quad (2.23)$$

On pose

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= \frac{u(x)}{|x|^{s+\frac{n}{2}}} \\ g_2(x, y) &= \frac{u(y)}{|x|^{s+\frac{n}{2}}} \end{aligned}$$

Donc 2.23 devient

$$|g_1(x, y) - g_2(x, y)| \leq 2^{s+\frac{n}{2}} Q_s[u](x, y),$$

ce qui donne

$$\|g_1 - g_2\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq 2^{s+\frac{n}{2}} \|Q_s[u]\|_{L^2(\tilde{\Omega})}.$$

On déduit alors

$$\left| \|g_1\|_{L^2(\tilde{\Omega})} - \|g_2\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \right| \leq 2^{s+\frac{n}{2}} \|Q_s[u]\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \quad (2.24)$$

On peut exprimer les normes $\|g_1\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ et $\|g_2\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ en fonction de $\|u\|_{L^{2,s}(\Omega_1)}$, en effet

– L'estimation de $\|g_1\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ s'effectue par intégration par rapport à y , où $|y| \in [0, |x|]$. On obtient :

$$\|g_1\|_{L^2(\tilde{\Omega})} = \mu(\omega) n^{-1} \|u\|_{L^{2,s}(\Omega_1)}^2 \quad (2.25)$$

où $\mu(\omega)$ désigne le volume de $\omega \subset S^{n-1}$.

- L'estimation de $\|g_2\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ s'effectue par intégration par rapport à x , où $|x| \in [|y|, 1]$. On obtient :

$$\|g_2\|_{L^2(\tilde{\Omega})} = \mu(\omega)(2s)^{-1} \left[\|u\|_{L^{2,s}(\Omega_1)}^2 - \|u\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \right] \quad (2.26)$$

On pose $A = \|u\|_{L^{2,s}(\Omega_1)}$ et $B = \|u\|_{L^2(\Omega_1)}$

D'après (2.22),..., (2.26), il existe une constante C , qui dépend de s et de n tel que

$$|A(2s)^{\frac{1}{2}} - (A^2 - B^2)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}| \leq C \|u\|_{H^s} \quad (2.27)$$

- Si $n < 2s$,

$$\begin{aligned} [(2s)^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}]A &\leq |A(2s)^{\frac{1}{2}} - (A^2 - B^2)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}| \\ &\leq C \|u\|_{H^s} \end{aligned}$$

Donc

$$\|r^{-s}u\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C_{n,s} \|u\|_{H^s}$$

- Si $n > 2s$, d'après (2.27)

$$(A^2 - B^2)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} - A(2s)^{\frac{1}{2}} \leq C \|u\|_{H^s},$$

comme $0 \leq A - B \leq (A^2 - B^2)^{\frac{1}{2}}$, on déduit que

$$[n^{\frac{1}{2}} - (2s)^{\frac{1}{2}}]A \leq C \|u\|_{H^s} + n^{\frac{1}{2}} B.$$

Donc il existe une constante $C_{n,s}$ tel que

$$\|r^{-s}u\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C_{n,s} \|u\|_{H^s}$$

Si on suppose que u est à support dans $\{r \leq r_1\}$, on déduit qu'il existe une constante positive C_{n,s,r_1} tel que

$$\|r^{-s}u\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C_{n,s,r_1} \|u\|_{H^s}$$

En passant en transformée de Mellin on en déduit

Proposition 5 Pour $s \in (0, 1)$ (en excluant le cas $s = \frac{1}{2}$ si $n = 1$) une fonction $u \in H^s(\Omega)$ telle que $\text{supp } u \subset \{r \leq 1\}$ (et $u(0) = 0$ pour $s > \frac{1}{2}$ et $n = 1$) a une transformée de Mellin qui appartient à $\mathbf{H}^2(\mathbb{C}_- + i(s - \frac{n}{2}); L^2(\omega))$.

Preuve 12 Il suffit d'utiliser la caractérisation des espaces L^2 à poids avec condition de support.

Dans le cas de la dimension 1, une valeur non nulle en 0 fait apparaître un pôle en $z = 0$ et on ne peut parler que du prolongement méromorphe de la transformée de Mellin. Cela sera plus clair avec les résultats qui suivent.

2.4.1 Cas de la dimension un

Proposition 6 1. $u \in L^2(\mathbb{R}_+^*, dr)$ et à support dans $\{r \leq 1\}$ si et seulement si $M(u) \in \mathbf{H}^2(\mathbb{C}_- - \frac{i}{2}, \frac{d\tau}{2\pi})$,

2. $u \in H^1(\mathbb{R}_+^*)$ et à support dans $\{r \leq 1\}$ si et seulement si $M(u)$ admet un prolongement méromorphe dans le demi-plan complexe $\Im(z) < \frac{1}{2}$ avec un unique pôle simple en zéro dont le résidu est $-iu(0)$. De plus si $\chi \in \mathcal{C}^\infty([0, 1])$ avec $\chi \equiv 1$ au voisinage de $r = 0$ la différence $u - u(0)\chi(r)$ appartient à $H^{1,1}(\mathbb{R}_+^*)$ et sa transformée de Mellin $M[u - u(0)\chi(r)]$ appartient à $\mathbf{H}^2(\mathbb{C}_- + \frac{i}{2}, \frac{d\tau}{2\pi})$.

Preuve 13 1. Par définition des espaces $L^{2,\gamma}$ on déduit que :

$$u \in L^2(\mathbb{R}_+^*, dr) \text{ et } \text{supp } u \subset \{r \leq 1\} \iff u \in L^{2,0} \text{ et } \text{supp } u \subset \{r \leq 1\}.$$

D'après les propriétés d'isométrie de la transformée de Mellin on déduit que $u \in L^{2,0}$ et à support dans $\{r \leq 1\}$ si et seulement si $M(u) \in \mathbf{H}^2(\mathbb{C}_- - \frac{i}{2}, \frac{d\tau}{2\pi})$, d'où le résultat.

2. En utilisant les définitions des espaces H^1 et $L^{2,\gamma}$ on obtient l'équivalence :

$$u \in H^1(\mathbb{R}_+^*) \text{ et } \text{supp } u \subset \{r \leq 1\} \iff u \in L^{2,0}, \partial_r u \in L^{2,0} \text{ et } \text{supp } u \subset \{r \leq 1\}. \quad (2.28)$$

En utilisant la première équivalence de la proposition 6 on obtient :

$$u \in L^{2,0}, \partial_r u \in L^{2,0} \text{ et } \text{supp } u \subset \{r \leq 1\}$$

$$\iff$$

$$M(u) \in \mathbf{H}^2(\mathbb{C}_- - \frac{i}{2}) \text{ et } M(\partial_r u) \in \mathbf{H}^2(\mathbb{C}_- - \frac{i}{2})$$

D'après les propriétés de dérivation et de multiplication par $r^{i\alpha}$ pour la transformée de Mellin, on déduit que la transformée de Mellin vérifie l'équation fonctionnelle

$$\begin{aligned} M(\partial_r u)(z) &= M(r^{-1}r\partial_r u)(z) \\ &= M(r\partial_r u)(z+i) \\ &= \frac{z+i}{i} M(u)(z+i) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Si on pose $Z = z + i$ alors (2.29) devient

$$ZM(u)(Z) = iM(\partial_r u)(Z-i). \quad (2.30)$$

Comme $M(\partial_r u)(Z) \in \mathbf{H}^2(\mathbb{C}_- - \frac{i}{2})$, on en déduit que $M(u)$ admet un prolongement méromorphe dans le demi-plan complexe $\Im(z) < \frac{1}{2}$ avec un unique pôle simple en $z = 0$.

En utilisant la relation entre $M(u)$ et $M(\partial_r u)$ on peut calculer le résidu de $M(u)$ ¹ en zéro, qu'on le note par $Res(M(u), 0)$.

On a par définition des résidus : $Res(M(u), 0) = [zM(u)(z)]_{|z=0}$

D'après (2.30) et la définition des résidus on a :

$$Res(M(u), 0) = iM(\partial_r u)(z - i)|_{z=0} = iM(\partial_r u)(-i)$$

En appliquant (2.1) à $iM(\partial_r u)(-i)$ on obtient :

$$iM(\partial_r u)(-i) = i \int_0^{+\infty} \partial_r u(r) dr = -iu(0)$$

Donc $Res(M(u), 0) = -iu(0)$.

Il reste à vérifier la dernière propriété. Tout d'abord $u \in H^1(\mathbb{R}_+^*)$ avec $\text{supp } u \subset \{r \leq 1\}$ entraîne $r\partial_r u \in L^2(\mathbb{R}_+^*, dr)$ et $u \in H^{1,0}(\mathbb{R}_+^*)$, il en est de même pour $u - \chi(r)u(0)$. La transformée de Mellin de $u - \chi(r)u(0) \in H^1(\mathbb{R}_+^*)$ admet un prolongement méromorphe dans $\mathbb{C}_- + \frac{i}{2}$ sans pôle en $z = 0$ puisque $u(0) - \chi(0)u(0) = 0$. C'est une fonction analytique. Par l'équation fonctionnelle ce prolongement vérifie

$$zM[u - \chi(r)u(0)](z) = iM[\partial_r u - \chi'(r)u(0)](z - i),$$

on sait de plus que ce prolongement admet une trace L^2 sur $\mathbb{R} + \frac{i}{2}$. On en déduit

$$M[u - \chi(r)u(0)] \in \mathbf{H}^2(\mathbb{C}_- + \frac{i}{2})$$

et donc $u - \chi(r)u(0) \in L^{2,1}(\mathbb{R}_+^*)$. De plus on a aussi par l'équation fonctionnelle

$$|z| M[u - \chi(r)u(0)](z) \in L^2(\mathbb{R} + \frac{i}{2}, \frac{d\tau}{2\pi})$$

et on en déduit $u \in H^{1,1}(\mathbb{R}_+^*)$.

Le Lemme 3 donne le résultat pour $s < \frac{1}{2}$. On admettra que le résultat est valable pour $u \in H^s(\mathbb{R}_+^*)$ avec $s > \frac{1}{2}$ en changeant les exposants. Nous renvoyons pour les détails à [3]. Modulo ce résultat (qui demande un traitement spécifique seulement pour la dimension 1), nous sommes capables d'en donner la version générale en itérant le procédé précédent.

Théorème 3 Pour tout $s \in \mathbb{R}_+$ tel que $s - \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ on a les propriétés suivantes. Si u appartient à $H^s(\mathbb{R}_+^*)$ et a un support inclus dans $\{r \leq 1\}$ alors $M(u)$ admet un prolongement méromorphe dans le demi-plan complexe $\Im(z) < s - \frac{1}{2}$ admettant uniquement des pôles simples en $z_k = ik$, $k = 0, \dots, [s - \frac{1}{2}]$ avec $Res(M(u), ik) = -\frac{i}{k!} \partial_r^k u(0)$. De plus si $P_{u, [s - \frac{1}{2}]}$ désigne son développement de Taylor à l'ordre $[s - \frac{1}{2}]$ et si $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ avec $\text{supp } \chi \subset \{r \leq 1\}$ et $\chi \equiv 1$ au voisinage de 0 alors on a

$$u - \chi(r)P_{u, [s - \frac{1}{2}]} \in H^{s,s}(\mathbb{R}_+^*).$$

¹On notera Mu même s'il s'agit d'un prolongement méromorphe de la vraie transformée de Mellin. En revanche on ne pourra plus interpréter cette fonction comme la transformée de Mellin de quelque chose quand on regarde cette fonction sur des droites horizontales du plan complexe situées au dessus des pôles.

Preuve 14 Nous posons $s = m + \sigma$ avec $m = [s]$ et $\sigma \neq \frac{1}{2}$. Le cas $m = 0$ est supposé acquis (voir la proposition 6 et la remarque précédente). Dans un premier temps nous allons montrer que la transformée de Mellin vérifie l'équation fonctionnelle

$$i^m M(\partial_r^k u)(z) = \prod_{l=1}^m (z + il) M(u)(z + im)$$

pour $k \leq m$. Cela permettra de définir le prolongement méromorphe de $M(u)$ dans $\mathbb{C}_- + i(s - \frac{1}{2})$. Ensuite nous calculerons les résidus aux pôles $z_k = ik$, $k = 0, \dots, [s - \frac{1}{2}]$,

$$\text{Res}(M(u), ik) = -\frac{i}{k!} \partial_r^k u(0), \forall k, \text{ tel que } 0 \leq k \leq [s - \frac{1}{2}].$$

Enfin nous terminerons en étudiant $u - \chi(r)P_{u, [s - \frac{1}{2}]}$.

D'après formule de dérivation de la transformation de Mellin on a :

$$\begin{aligned} M(\partial_r^m u)(z) &= \frac{z+i}{i} M(\partial_r^{m-1} u)(z+i) \\ &= \frac{z+i}{i} \frac{z+2i}{i} M(\partial_r^{m-2} u)(z+2i). \end{aligned}$$

Une récurrence immédiate donne :

$$M(\partial_r^m u)(z) = \frac{\prod_{l=1}^m (z + il)}{i^m} M(u)(z + im)$$

que l'on écrit

$$i^m M(\partial_r^m u)(Z - im) = \prod_{l=0}^{m-1} (Z - il) M(u)(Z) \quad (2.31)$$

en posant $Z = z + im$. Or on sait que $\partial_r^m u$ appartient à $H^\sigma(\mathbb{R}_+^*)$ avec $\text{supp } u \subset \{r \leq 1\}$.

Il y a deux cas :

- Pour $s \in (0, \frac{1}{2})$ le Lemme 3 nous dit que $\partial_r u$ appartient à $L^{2,\sigma}$ et donc $M(\partial_r u) \in \mathbf{H}^2(\mathbb{C}_- + i(\sigma - \frac{1}{2}))$. L'équation fonctionnelle précédente nous dit alors que $M(u)$ admet un prolongement méromorphe dans $\mathbb{C}_- + i(m + \sigma - \frac{1}{2}) = \mathbb{C}_- + i(s - \frac{1}{2})$ avec des pôles simples en $z = ik$, $k = 0, \dots, m-1$ avec ici $m-1 = [s - \frac{1}{2}]$.
- Pour $s \in (\frac{1}{2}, 1)$ on utilise la remarque précédente et nous admettons que $M(u)$ admet un prolongement méromorphe dans $\mathbb{C}_- + i(\sigma - \frac{1}{2})$ avec un pôle en 0. On en déduit que $M(u)$ admet un prolongement méromorphe dans $\mathbb{C}_- + i(s - \frac{1}{2})$ avec des pôles simples en $z = ik$, $k = 0, \dots, m$ avec ici $m = [s - \frac{1}{2}]$.

• **Calcul du $\text{Res}(M(u), ik)$**

Pour $0 \leq k \leq m-1$ on a par définition

$$\text{Res}(M(u), ik) = (z - ik)M(u)(z)|_{z=ik}$$

D'après l'égalité (2.31) on a :

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(M(u), ik) &= \frac{i^m M(\partial_r^m u)(z - im)}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{m-1} (z - il)} \Big|_{z=ik} \\
 &= \frac{i^m M(\partial_r^m u)(i(k - m))}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{m-1} (i(k - l))} \\
 &= \frac{i M(\partial_r^m u)(i(k - m))}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{m-1} ((k - l))}
 \end{aligned}$$

D'une part on a :

$$\begin{aligned}
 \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{m-1} (k - l) &= \prod_{l=0}^{k-1} (k - l) \prod_{l=k+1}^{m-1} (k - l) \\
 &= (-1)^{m-1-k} \prod_{l=1}^k (l) \prod_{l=k+1}^{m-1} (l - k) \\
 &= (-1)^{m-1-k} k! \prod_{l=1}^{m-1-k} (l) \\
 &= (-1)^{m-1-k} k! (m - 1 - k)!
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

D'autre part on a par définition de la transformée de Mellin :

$$M(\partial_r^m u)(i(k - m)) = \int_0^{+\infty} r^{m-k-1} \partial_r^m u(r) dr.$$

L'intégration par parties valable pour $u \in H^s$, $\text{supp } u \subset \{r \leq 1\}$ donne :

$$\begin{aligned}
 M(\partial_r^m u)(i(k - m)) &= -(m - k - 1) \int_0^{+\infty} r^{m-k-2} \partial_r^{m-1} u(r) dr \\
 &= (-(m - k - 1))(-(m - k - 2)) \int_0^{+\infty} r^{m-k-3} \partial_r^{m-2} u(r) dr
 \end{aligned}$$

Une récurrence immédiate donne

$$M(\partial_r^m u)(i(k - m)) = (-1)^{m-k-1} (m - k - 1)! \int_0^{+\infty} \partial_r^{k+1} u(r) dr.$$

Donc

$$M(\partial_r^m u)(i(k - m)) = (-1)^{m-k} (m - k - 1)! \partial_r^k u(0) \tag{2.33}$$

En utilisant (2.32) (2.33) on peut déduire que $\text{Res}(M(u)(z), ik) = \frac{-i \partial_r^k u(0)}{k!}$.

Enfin pour $k = m$ et dans le cas $\sigma > \frac{1}{2}$, on a

$$\text{Res}(M(u), im) = \frac{i^m}{\prod_{l=0}^{m-1}(im - il)} \text{Res}(M(\partial_r^m u, 0)) = -\frac{i}{m!} \partial_r^m u(0) .$$

Nous terminons par l'étude de $v = u - \chi P_{u, [s-\frac{1}{2}]}$. Comme dans le cas $s = 1$, on voit que $v \in H^s(\mathbb{R}_+^*)$ avec $\text{supp } v \subset \{r \leq 1\}$. Ainsi $M(v)$ admet un prolongement méromorphe dans $\mathbb{C}_- + i(s - \frac{1}{2})$. Comme de plus $\partial_r^k v = 0$ pour $0 \leq k \leq [s - \frac{1}{2}]$, on en déduit que $M(v)$ est holomorphe dans $\mathbb{C}_- + i(s - \frac{1}{2})$, et donc $v \in L^{2,s}$. Enfin l'équation fonctionnelle assure que $M(v)$ a une trace L^2 sur $\mathbb{R} + i(s - \frac{1}{2})$ telle que $|z|^{[s]} M(v)(z) \in L^2(\mathbb{R} + i(s - \frac{1}{2}))$. Cela entraîne $v \in H^{[s],s}(\mathbb{R}_+^*)$. En fait on peut démontrer $v \in H^{s,s}(\mathbb{R}_+^*)$ même si s n'est pas un entier et nous renvoyons pour cela à [3]-Theorem A.A.7.

2.4.2 Cas de la dimension $n > 1$

Dans cette partie on considère un domaine conique régulier $\mathbb{R}_+^* \times \omega = \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Théorème 4 Pour tout $s \in \mathbb{R}_+$ tel que $s - \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$ on a les propriétés suivantes. Si u appartient à $H^s(\Omega)$ et a un support inclus dans $\{r \leq 1\}$ alors pour tout $\alpha' \in \mathbb{N}^{n-1}$, $|\alpha'| \leq [s]$, $M(\nabla_{\theta}^{\alpha'} u)$ admet un prolongement méromorphe dans le demi-plan complexe $\Im(z) < s - \frac{n}{2}$ admettant uniquement des pôles simples en $z_k = ik$, $|\alpha'| \leq k \leq [s - \frac{n}{2}]$ avec

$$\text{Res}(M(\nabla_{\theta}^{\alpha'} u), ik) = -\frac{i}{(k - |\alpha'|)!} \partial_r^{k-|\alpha'|} \left(\frac{1}{r} \nabla_{\theta} \right)^{\alpha'} u(0) .$$

De plus si $P_{u, [s-\frac{n}{2}]}$ désigne son développement de Taylor à l'ordre $[s - \frac{n}{2}]$ et si $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ avec $\text{supp } \chi \subset \{r \leq 1\}$ et $\chi \equiv 1$ au voisinage de 0 alors on a

$$u - \chi(r) P_{u, [s-\frac{n}{2}]} \in H^{s,s}(\Omega) .$$

Preuve 15 Nous posons $s = m + \sigma$ avec $m = [s]$, $s - \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$.

Dans un premier temps nous allons montrer que la transformée de Mellin vérifie l'équation fonctionnelle

$$M(\partial_{\theta}^{\alpha'} u)(z) = \frac{i^{\alpha}}{\prod_{k=0}^{\alpha-1} (z - i(|\alpha'| + k))} M(\partial_r^{\alpha} \left(\frac{\partial_{\theta}^{\alpha'}}{r^{|\alpha'|}} \right) u)(z - i(|\alpha'| + \alpha))$$

pour $\alpha + |\alpha'| \leq m$. Cela permettra de définir un prolongement méromorphe de $M(\nabla_{\theta}^{\alpha'} u)$ dans $\mathbb{C}_- + i(s - \frac{n}{2})$. Ensuite nous calculons les résidus aux pôles $z_k = ik$, $k = |\alpha'|, \dots, [s - \frac{n}{2}]$,

$$\text{Res}(M(\nabla_{\theta}^{\alpha'} u), ik) = -\frac{i}{(k - |\alpha'|)!} \partial_r^{k-|\alpha'|} \left(\frac{1}{r} \nabla_{\theta} \right)^{\alpha'} u(0) .$$

Enfin nous terminerons en étudiant $u - \chi(r) P_{u, [s-\frac{n}{2}]}$.

D'après les propriétés de la transformée de Mellin (multiplication par $r^{i\alpha}$) on a

$$M(\nabla_{\theta}^{\alpha'} u)(z) = M(r^{|\alpha'|} \frac{1}{r^{|\alpha'|}} \nabla_{\theta}^{\alpha'} u)(z) = M(\frac{1}{r^{|\alpha'|}} \nabla_{\theta}^{\alpha'} u)(z - i|\alpha'|) .$$

On utilise la formule de dérivation de la transformée de Mellin ($M(\partial_r u)(z) = \frac{z+i}{i} M(u)(z+i)$) on aboutit à

$$M(\partial_r(\frac{1}{r^{|\alpha'|}} \nabla_{\theta}^{\alpha'} u))(z) = \frac{z+i}{i} M(\frac{1}{r^{|\alpha'|}} \nabla_{\theta}^{\alpha'} u)(z+i). \quad (2.34)$$

En remplaçant z par $z-i$ dans (2.34) on obtient

$$M(\frac{1}{r^{|\alpha'|}} \nabla_{\theta}^{\alpha'} u)(z) = \frac{i}{z} M(\partial_r(\frac{1}{r^{|\alpha'|}} \nabla_{\theta}^{\alpha'} u))(z-i). \quad (2.35)$$

Une récurrence simple donne

$$M(\frac{1}{r^{|\alpha'|}} \nabla_{\theta}^{\alpha'} u)(z) = \frac{i^{\alpha}}{\prod_{l=0}^{\alpha-1} (z-il)} M(\partial_r^{\alpha} \frac{\nabla_{\theta}^{\alpha'}}{r^{|\alpha'|}} u)(z-i\alpha). \quad (2.36)$$

Finalement, en remplaçant z par $z-i|\alpha'|$ dans (2.36) on obtient la formule demandée c'est à dire

$$M(\nabla_{\theta}^{\alpha'} u)(z) = \frac{i^{\alpha}}{\prod_{k=0}^{\alpha-1} (z-i(|\alpha'|+k))} M(\partial_r^{\alpha} (\frac{\nabla_{\theta}^{\alpha'}}{r^{|\alpha'|}} u))(z-i(\alpha+|\alpha'|))$$

À partir de l'équation fonctionnelle on déduit que $M(\nabla_{\theta}^{\alpha'} u)$ admet un prolongement méromorphe dans $\mathbb{C}_- + i(s - \frac{n}{2})$.

En posant $\alpha + |\alpha'| = m$, dans l'équation fonctionnelle on obtient :

$$M(\nabla_{\theta}^{\alpha'} u)(z) = \frac{i^{\alpha}}{\prod_{k=|\alpha'|}^{m-1} (z-ik)} M(\partial_r^{\alpha} (\frac{\nabla_{\theta}^{\alpha'}}{r^{|\alpha'|}} u))(z-im)$$

On remarque que

– Si $|\alpha'| > s - \frac{n}{2}$, alors $M(\nabla_{\theta}^{\alpha'} u)$ est une fonction holomorphe et n'a pas de pôles dans la partie du plan complexe où $\Im(z) \leq s - \frac{n}{2}$.

– Si $|\alpha'| < s - \frac{n}{2}$ alors $M(\nabla_{\theta}^{\alpha'} u)$ admet un prolongement méromorphe dans le demi-plan complexe $\Im(z) < s - \frac{n}{2}$, avec des pôles simples en $z_k = ik$, $|\alpha'| \leq k \leq [s - \frac{n}{2}]$.

• Calcul du résidu

Pour $|\alpha'| + \alpha = k + 1$, en utilisant l'équation fonctionnelle et la définition des résidus on peut écrire

$$\begin{aligned} \text{Res}(M(\nabla_{\theta}^{\alpha'} u), ik) &= \lim_{z \rightarrow ik} (z - ik) M(\nabla_{\theta}^{\alpha'} u)(z) \\ &= \frac{(i)^{k+1-|\alpha'|}}{(i)^{k-|\alpha'|} (k-|\alpha'|)!} M(\partial_r^{k-|\alpha'|+1} \frac{\nabla_{\theta}^{\alpha'}}{r^{|\alpha'|}} u)(-i) \\ &= \frac{i}{(k-|\alpha'|)!} M(\partial_r^{k-|\alpha'|+1} \frac{\partial_{\theta}^{\alpha'}}{r^{|\alpha'|}} u)(-i). \end{aligned}$$

En utilisant la définition de la transformée de Mellin et un simple calcul donne :

$$M(\partial_r^{k-|\alpha'|+1} \frac{\nabla_{\theta}^{\alpha'}}{r^{|\alpha'|}} u)(-i) = -\partial_r^{k-|\alpha'|} (\frac{\nabla_{\theta}}{r})^{\alpha'} u(0),$$

donc le résidu de $M(\nabla_\theta^{\alpha'} u)$ au pôle z_k est donné par

$$\text{Res}(M(\nabla_\theta^{\alpha'} u), ik) = \frac{-i}{(k - |\alpha'|)!} \partial_r^{k-|\alpha'|} \left(\frac{\nabla_\theta}{r} \right)^{\alpha'} u(0).$$

Nous terminons par l'étude de $v = u - \chi(r)P_{u, [s-\frac{n}{2}]}$.

On voit que $v \in H^s(\Omega)$ et $\text{supp } v \subset \{r \leq 1\}$. Ainsi $M(v)$ admet un prolongement méromorphe dans $\mathbb{C}_- + i(s - \frac{n}{2})$ et donc $v \in L^{2,s}$. L'équation fonctionnelle assure que $M(\nabla_\theta^{\alpha'})$ a une trace L^2 sur $\mathbb{R} + i(s - \frac{n}{2})$ telle que $|z|^{[s]-|\alpha'|} M(\nabla_\theta^{\alpha'} v)(z) \in L^2(\mathbb{R} + i(s - \frac{n}{2}))$. Cela entraîne que $v \in H^{[s],s}(\Omega)$, et peut prolonger l'identité pour les exposants non entiers, ainsi $v \in H^{s,s}$, nous renvoyons pour cela à [3]-Theorem A.A.7.

L'appartenance de $u - \chi(r)P_{u, [s-\frac{n}{2}]} \in L^{2,s}(\Omega)$, signifie que le reste est négligeable quand $r \rightarrow 0$ en norme L^2 .

L'appartenance de $u - \chi(r)P_{u, [s-\frac{n}{2}]} \in H^{s,s}$ signifie que le reste est négligeable quand $r \rightarrow 0$ en norme L^2 des dérivées par rapport à r et $r^{-1}\partial_\theta$.

On présente dans la figure 2.1 la répartition des pôles dans le plan complexe.

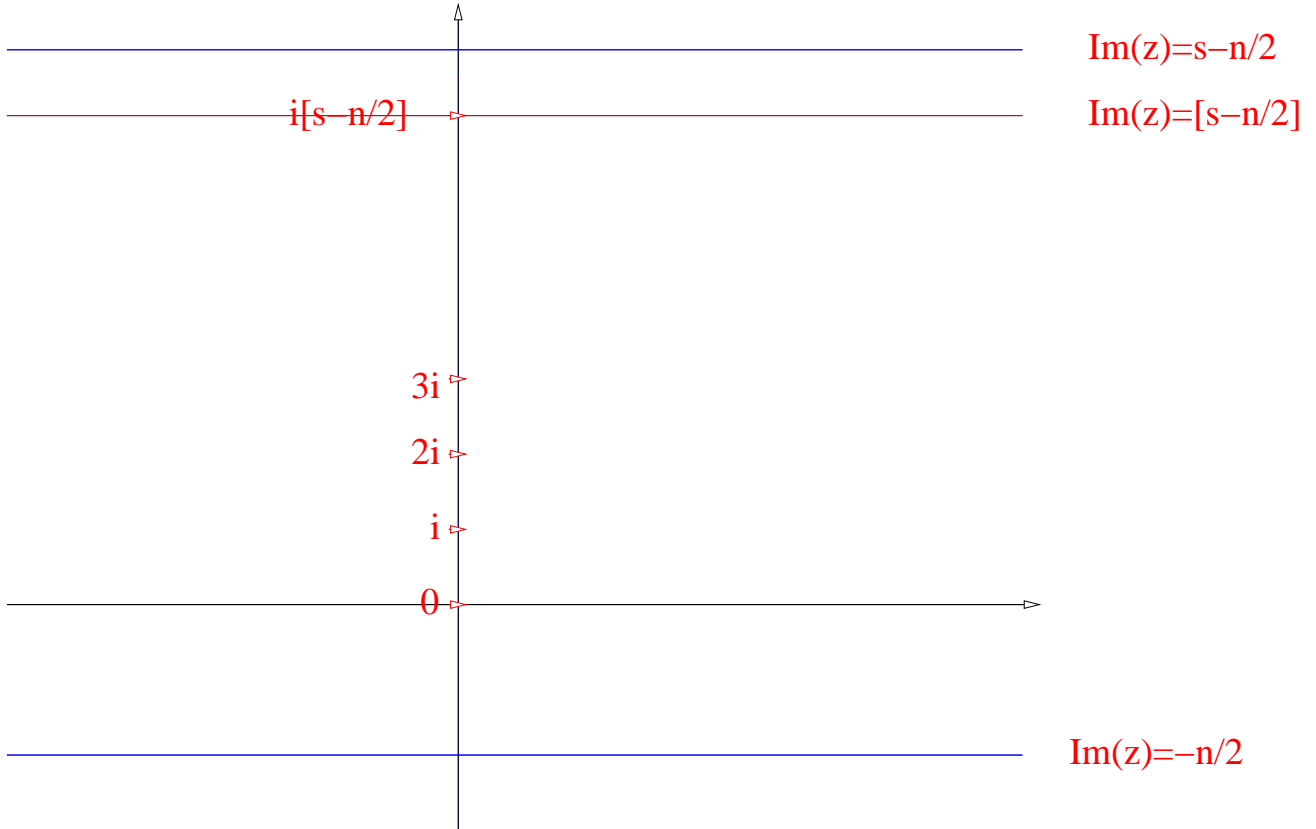


FIG. 2.1 – Répartition des pôles dans le plan complexe.

Remarque 3 En dimension n la description de la régularité H^s avec $s - \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$ est un peu plus délicate. Ces espaces conduisent à des transformées de Mellin qui ont juste des

singularités sur la droite $\Re z = s - \frac{n}{2}$ du type $\frac{1}{x-i0}$ sur \mathbb{R} . Nous ne discuterons pas plus ce point et renvoyons pour cela à [3], [22] et [6].

Nous éviterons toujours ces situations critiques en travaillant sous l'hypothèse d'un peu plus ou d'un peu moins de régularité. Comme nous allons le voir dans le chapitre suivant, l'idée est de travailler sur les types asymptotiques qui généralisent le développement de Taylor, c'est-à-dire dans ce cas sur la position des pôles entre 0 et $i[s - \frac{n}{2}]$, la valeur exacte de s important peu.

Chapitre 3

Types asymptotiques et stratégie de l'optimisation des conditions d'interface au coin.

Nous introduirons les espaces de Sobolev avec singularités prescrites (ou type asymptotique) qui interviennent naturellement dans la résolution des problèmes elliptiques dans des domaines à singularité conique. La transformation de Mellin permet de donner une description très visuelle de ces espaces. La présentation que nous donnons ici ne couvre pas tous les aspects de l'étude des problèmes elliptiques dans les domaines à coins et nous ne retenons de cette théorie que les éléments qui nous sont utiles pour discuter l'optimisation des conditions d'interface dans les méthodes de décomposition de domaine. Nous renvoyons pour plus de détails à [22] et [3]. Enfin, nous nous limiterons ici à la dimension $n = 2$, $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times]\theta_-, \theta_+[$, le cas $n = 1$ intervenant pour les traces sur les bords $\{\theta = \theta_\pm\}$.

3.1 Résumé du chapitre précédent.

Nous avons vu dans le cas $n = 2$ qu'un élément u de $H^s(\Omega)$ pour $s \notin \mathbb{N}^*$ s'écrit

$$u = P_{u,[s-1]}(x) + R(x)$$

où $P_{u,[s-1]}$ est l'approximation de Taylor de u en 0 à l'ordre s et $R \in H^{s,s}(\Omega)$. Notons que $R \in L^{2,s}(\Omega) = H^{0,s}(\Omega)$ signifie que R est un reste négligeable en 0 mesuré en norme L^2 , et $R \in H^{s,s}(\Omega)$ donne en plus des informations sur les dérivées d'ordre $\leq [s]$. Après transformation de Mellin en supposant u à support dans $\{r \leq 1\}$, la transformée de Mellin est une fonction méromorphe sur $\{\Im z < s - 1\}$ à valeur dans $L^2((\theta_-, \theta_+))$ avec des pôles simples aux points ik , $0 \leq k \leq [s - 1]$ ¹.

Ainsi une fonction $u \in H^s(\Omega)$ s'écrit

$$u(x) = \sum_{|\alpha| \leq [s-1], \alpha \in \mathbb{N}} c_\alpha x^\alpha + R(x)$$

¹L'écriture du chapitre précédent était un peu plus explicite. Cette réécriture ne pose pas de problème si l'on note que la transformation de Mellin est introduite après une séparation des variables en r et θ .

où

- les exposants α sont liés à la position des pôles du prolongement méromorphe de la transformée de Mellin à $\{\Im z < s - 1\}$;
- les coefficients c_α sont donnés par les résidus en ces pôles de $M(u)$;
- le reste $R(x) \in H^{s,s}(\Omega) \subset L^{2,s}(\Omega)$ est négligeable en norme L^2 .

En conclusion la partie principale de u au voisinage de $x = 0$ est entièrement codée par les pôles du prolongement méromorphe de la transformée de Mellin Mu dans $\{\Im z < s - 1\}$, l'appartenance du reste R à $H^{s,s}$ se lit sur le fait que Mu admet une trace L^2 sur $\{\Im z = s - 1\}$.

3.2 Quelques rappels.

Pour motiver l'introduction des types asymptotiques et avant de préciser notre point de vue sur l'optimisation des méthodes de décomposition de domaines aux coins, nous faisons quelques rappels classiques sur la résolution des problèmes elliptiques dans des domaines coniques de \mathbb{R}^2 .

3.2.1 Un exemple.

Commençons pour fixer les idées par traiter l'exemple simple suivant. On travaille dans $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times (\theta_-, \theta_+)$ un secteur du plan et on considère une fonction $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\text{supp } u \subset \{r \leq 1\}$ et

$$-\Delta u = f \in L^{2,\gamma}(\Omega) \quad (3.1)$$

$$u(r, \theta_\pm) = g_\pm(r) \in L^{2,\gamma+2-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+^*) . \quad (3.2)$$

Les conditions sur u entraînent que sa transformée de Mellin est holomorphe dans $\{\Im z < 0\}$ et comme les conditions de support se transmettent à f, g_\pm , les transformées de Mellin de f et g_\pm sont holomorphes respectivement dans $\{\Im z < \gamma - 1\}$ et $\{\Im z < \gamma + 1\}$ avec traces L^2 sur les droites limites (on a aussi forcément des propriétés de régularités sur g_\pm sur lesquelles nous ne nous attardons pas). Nous nous intéressons au cas $\gamma > -1$. En passant en coordonnées polaires, l'équation (3.1) devient

$$\begin{aligned} [\partial_\theta^2 + (r\partial_r)^2] u &= -r^2 f \\ u(r, \theta_\pm) &= g_\pm(r) . \end{aligned}$$

Après transformation de Mellin on obtient

$$[\partial_\theta^2 - z^2] (Mu)(z, \theta) = M[-r^2 f](z, \theta) = -(Mf)(z - 2i, \theta) \quad (3.3)$$

$$Mu(z, \theta_\pm) = Mg_\pm(z, \theta_\pm) . \quad (3.4)$$

L'opérateur ∂_θ^2 avec conditions de Dirichlet homogène sur (θ_-, θ_+) est un opérateur auto-adjoint négatif à résolvante compacte dont les valeurs propres sont simples et valent $-(\frac{n\pi}{\theta_+ - \theta_-})^2$, $n \in \mathbb{N}$. La théorie de Fredholm analytique conduit alors à

$$Mu(z) = R(z)[Mf(z - 2i), Mg_-(z), Mg_+(z)]$$

où $R(z)$ est une fonction méromorphe à valeur opérateur bornée sur $L^2((\theta_-, \theta_+))$ avec des pôles simples en $z = in \frac{\pi}{\theta_+ - \theta_-}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Compte tenu des informations à priori que nous avons sur u , f , g_{\pm} , nous en déduisons la

Proposition 7 Une fonction $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\text{supp } u \subset \{r \leq 1\}$ vérifiant (3.1) avec $\gamma > -1$, a une transformée de Mellin méromorphe dans $\{\Im z < \gamma + 1\}$. Elle a des pôles simples aux points $in \frac{\pi}{\theta_+ - \theta_-}$, $\frac{n\pi}{\theta_+ - \theta_-} < (\gamma + 1)$, $n \in \mathbb{N}$ avec

$$\text{Res}(Mu, in \frac{\pi}{\theta_+ - \theta_-}) = c_{n,u} \sin(n \frac{\pi}{\theta_+ - \theta_-} (\theta - \theta_-)), \quad \frac{n\pi}{\theta_+ - \theta_-} < \gamma + 1.$$

Si de plus $\gamma + 1 \notin \left\{ \frac{n\pi}{\theta_+ - \theta_-}, n \in \mathbb{N} \right\}$, on a

$$u = \chi(r) \sum_{n \in \mathbb{N}, n < \frac{(\theta_+ - \theta_-)(\gamma + 1)}{\pi}} i c_{n,u} r^{\frac{n\pi}{\theta_+ - \theta_-}} \sin\left(\frac{n\pi}{\theta_+ - \theta_-} (\theta - \theta_-)\right) + R$$

avec $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\text{supp } \chi \subset \{r \leq 1\}$, $\chi \equiv 1$ au voisinage de 0, et $R \in L^{2,\gamma+2}(\Omega)$.

Remarque 4 – En fait on peut avoir en plus des propriétés de régularité sur u et R si on précise la régularité de f , g_- et g_+ (voir le résultat de Kondratiev rappelé plus loin).

- Le même type d'analyse peut se faire en remplaçant l'intervalle (θ_-, θ_+) par S^1 . Les pôles de $R(z)$ sont donnés par les valeurs in , $n \in \mathbb{Z}$ correspondant aux valeurs propres $-n^2$ du Laplacien sur S^1 avec les fonctions propres $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$. En fait les pôles correspondent aux pôles associés à une fonction H^2 (voire H^{s+2} si on suppose de la régularité supplémentaire sur f) et le développement asymptotique n'est rien d'autre que le développement de Taylor de la solution à l'ordre $[\gamma + 1]$.

Preuve 16 En premier lieu, les pôles de $R(z)$ sont déterminés par la résolution du problème aux valeurs propres

$$\partial_\theta^2 v = z^2 v, \quad v(\theta_-) = v(\theta_+) = 0$$

Les solutions sont

$$z = \frac{in\pi}{\theta_+ - \theta_-}, \quad v(\theta) = \sin\left(\frac{n\pi}{\theta_+ - \theta_-} (\theta - \theta_-)\right).$$

On en déduit la position des pôles du prolongement méromorphe de Mu et la forme du résidu. Si $\gamma + 1 \notin \left\{ \frac{n\pi}{\theta_+ - \theta_-}, n \in \mathbb{N} \right\}$, $R(z)$ est un opérateur uniformément borné par rapport à z sur $\{\Im z = (\gamma + 1)\}$ et on en déduit que le prolongement méromorphe de Mu à $\{\Im z < \gamma + 1\}$ a une trace L^2 sur $\{\Im z = \gamma + 1\}$. Il suffit donc d'éliminer les pôles de Mu pour conclure. Compte tenu de

$$M[r^{\gamma'} \chi](z) = M[r^{i(-i\gamma')} \chi](z) = M(\chi)(z - i\gamma') = \frac{i}{z - i\gamma'} M[r \partial_r \chi](z - i\gamma')$$

où $M[r\partial_r\chi]$ est holomorphe avec $M[r\partial_r\chi](0) = -\chi(0) = 0$, cela revient à supprimer le terme

$$\chi(r) = \sum_{n \in \mathbb{N}, n < \frac{(\theta_+ - \theta_-)(\gamma+1)}{\pi}} i c_{n,u} r^{\frac{n\pi}{\theta_+ - \theta_-}} \sin\left(\frac{n\pi}{\theta_+ - \theta_-}(\theta - \theta_-)\right).$$

Nous terminons ce paragraphe par une remarque. Ici nous avons supposé les données f, g_{\pm} dans un espace à poids de telle sorte que leur transformée de Mellin n'a pas de pôle dans $\{\Im z < \gamma - 1\}$ et $\{\Im z < \gamma + 1\}$.

On pourrait considérer des données ($f \in H^s$ et $g \in H^{s+\frac{3}{2}}$ par exemple) dont les transformées de Mellin sont méromorphes. Dans ce cas la transformée de Mellin de u aurait des pôles venant de $R(z)$ auxquels s'ajouteraient les pôles venant des données.

3.2.2 Un autre exemple

On donne dans cette section une application des résultats de Kondratiev dans le cas où les opérateurs intervenant dans les conditions aux limites sont ceux de Neumann ou de Dirichlet. On restreint aussi cette application à l'opérateur de Laplace qui est un opérateur différentiel d'ordre 2.

Soit Ω un secteur angulaire infini d'angle ϕ , de sommet O et de frontière Γ .

On étudie le problème de Laplace avec condition de Dirichlet ou de Neumann

$$(S) \begin{cases} \Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ B_l^0 u = g, \text{ sur } \Gamma, l = 0 \text{ ou } 1 \end{cases}$$

où f est donnée dans $H^{k,\gamma}(\Omega)$ et

$$\begin{cases} B_0^0 = Id \text{ avec } g \in H^{k+2-\frac{1}{2}, k+2-\frac{2}{2}-\gamma}(\Gamma) \\ B_1^0 = \partial_n \text{ avec } g \in H^{k+2-1-\frac{1}{2}, k+2-1-\frac{2}{2}-\gamma}(\Gamma) \end{cases}$$

On choisit O comme origine.

Le problème s'écrit en coordonnées polaires

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \left((r\partial_r)^2 + \partial_\theta^2 \right) u = f \\ B_l^1 u = g \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} B_0^1 = Id \\ B_1^1 = \frac{1}{r} \partial_\theta \end{cases}$$

On effectue maintenant la transformation d'Euler $r = e^{-\tau}$, qui transforme le secteur en une bande notée B , définie par

$$B = \{(\tau, \theta), \tau \in \mathbb{R}, 0 < \theta < \phi\}$$

de frontière

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \{(\tau, 0), \tau \in \mathbb{R}\} \\ \Delta_2 &= \{(\tau, \phi), \tau \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

on note $\tilde{\Delta} = \Delta_1 \cup \Delta_2$.

On remarque que $\partial_\tau = -r\partial_r$.

Alors

$$\begin{cases} (\partial_\tau^2 + \partial_\theta^2)u(\tau, \theta) &= e^{-2\tau}f = f_1(\tau, \theta) \\ B_l^2 u &= ge^{-\tau l} = g_1(\tau, \theta) \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} B_0^2 &= Id \\ B_1^2 &= \partial_\theta \end{cases}$$

Donc on résout maintenant un problème dans un domaine à frontière régulière.

Par passage au Fourier par rapport à τ ou de façon équivalente le passage en Mellin par rapport à r on obtient

$$\begin{cases} (\partial_\theta^2 - \lambda^2)\hat{u}(\tau, \theta) &= \hat{f}_1(\lambda, \theta) = f_2(\lambda, \theta) \text{ dans } D =]0, \phi[\\ B_l^2 u|_{\tilde{\Delta}} &= \hat{g}_1(\lambda, \theta)|_{\tilde{\Delta}} = g_2(\lambda, \theta)|_{\tilde{\Delta}} \end{cases}$$

Donc le problème s'écrit sous la forme

$$P(\lambda)\hat{u} = (f_2, g_2)$$

où

$$P(\lambda) : H^{k+2}([0, \phi]) \longrightarrow H^k([0, \phi]) \times H^{k+2-l-\frac{1}{2}}(\partial D)$$

est un opérateur différentiel sur D .

Donc $\hat{u} = R(\lambda)(f_2, g_2)$.

Un calcul simple donne que les pôles de $R(\lambda)$ sont de la forme $\frac{in\pi}{\phi}$, où $n \in \mathbb{Z}$, les fonctions propres sont

- si $B_0^2 = Id$, les fonctions propres sont de la forme $v_n = a \sin(\frac{n\pi\theta}{\phi})$, a est une constante ;
- si $B_1^2 = \partial_\theta$, les fonctions propres sont de la forme $v_n = a \cos(\frac{n\pi\theta}{\phi})$, a est une constante.

Remarque 5 Dans notre cas on peut déterminer explicitement l'expression de $R(\lambda)$ en utilisant les théorèmes classiques des équations ordinaires. Après avoir trouvé l'expression de $R(\lambda)$ il sera facile de savoir ses pôles.

Théorème 5 Si $R(\lambda)$ n'admet pas de pôle sur la droite $\Im(\lambda) = k + 1 - \gamma$

c'est à dire γ n'est pas de la forme $k + 1 - \frac{n\pi}{\phi}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Alors $\forall (f, g) \in H^{k, k-\gamma}(\Omega) \times H^{k+2-l-\frac{1}{2}, k+2-l-\frac{1}{2}-\gamma}(\Gamma)$,

le problème (S) a une unique solution $u \in H^{k+2, k+2-\gamma}(\Omega)$.

De plus il existe une constante C positive telle que

$$\|u\|_{H^{k+2, k+2-\gamma}(\Omega)} \leq C \left[\|f\|_{H^{k, k-\gamma}} + \|g\|_{H^{k+2-l-\frac{1}{2}, k+2-l-\frac{1}{2}-\gamma}(\Gamma)} \right]$$

Preuve 17 Voir le théorème 1.1 de Kondratiev [22] "que nous rappelons dans la section suivante".

Supposons que

$$(f, g) \in H^{k, k-\gamma}(\Omega) \times H^{k+2-l-\frac{1}{2}, k+2-l-\frac{1}{2}-\gamma}(\Gamma)$$

et que

$$(f, g) \in H^{k_1, k_1-\gamma_1}(\Omega) \times H^{k_1+2-l-\frac{1}{2}, k_1+2-l-\frac{1}{2}-\gamma_1}(\Gamma)$$

où $k_1 \geq k$ et $h = -\gamma + 1 + k < h_1 = -\gamma_1 + 1 + k_1$.

Si $R(\lambda)$ n'admet pas de pôles sur les deux droites $\Im(\lambda) = h$ et $\Im(\lambda) = h_1$ alors d'après le théorème 5, il existe une solution u dans $H^{k+2, k+2-\gamma}(\Omega)$ et une autre solution w dans $H^{k_1+2, k_1+2-\gamma_1}(\Omega)$, de plus w est plus régulière que u en zéro.

Alors on peut donner le résultat suivant, qui caractérise le développement asymptotique de u .

Théorème 6 Si

$$u \in H^{k+2, k+2-\gamma}$$

et

$$(f, g) \in H^{k_1, k_1-\gamma_1}(\Omega) \times H^{k_1+2-l-\frac{1}{2}, k_1+2-l-\frac{1}{2}-\gamma_1}(\Gamma)$$

avec $k_1 \geq k, h_1 > h > 0$.

Supposons de plus

$$\begin{aligned} \gamma &\neq k + 1 - \frac{n\pi}{\phi}, n \in \mathbb{Z}; \\ \gamma_1 &\neq k_1 + 1 - \frac{n\pi}{\phi}, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}.$$

Alors

1. Si $B_0^0 = Id$, u s'écrit sous la forme

$$u = \sum_{m \in \mathbb{N}, h < \frac{m\pi}{\phi} < h_1} a_m r^{\frac{m\pi}{\phi}} \sin \frac{m\pi}{\phi} + w$$

où

$$w \in H^{k_1+2, k_1+2-\gamma_1}(\Omega)$$

2. Si $B_1^0 = \partial_n$, u s'écrit sous la forme

$$u = \sum_{m \in \mathbb{N}, h < \frac{m\pi}{\phi} < h_1} a_m r^{\frac{m\pi}{\phi}} \cos \frac{m\pi}{\phi} + w$$

où

$$w \in H^{k_1+2, k_1+2-\gamma_1}(\Omega)$$

Preuve 18 C'est une conséquence du théorème 1.2 de Kondratiev "que nous rappelons dans la section suivante". [22]

3.3 Résultats de Kondratiev

Nous rappelons ici une version simplifiée des résultats de Kondratiev dans notre contexte et avec nos notations. Nous nous limitons toujours au cas de la dimension 2 et on travaille dans $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times (\theta_-, \theta_+)$.

On considère un opérateur différentiel d'ordre 2 (pour ne pas alourdir cette présentation).

$$L(x, \partial_x) = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$$

à coefficients a_α de classe \mathcal{C}^∞ , elliptique. Les opérateurs intervenant dans les conditions aux limites sont données par des opérateurs

$$B_\pm(x, \partial_x) = \sum_{|\beta| \leq m_\pm} \frac{b_\beta(x)}{|x|^{\mu_\beta}} \partial_x^\beta$$

avec $\mu_\beta \leq m_\pm - |\beta|$ et les coefficients b_β sont de classe \mathcal{C}^∞ .

On associe à ces opérateurs les parties principales en $x = 0$

$$\begin{aligned} L_0 &= \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(0) \partial_x^\alpha \quad \text{elliptique} \\ B_{0,\pm} &= \sum_{|\beta|+\mu_\beta=m_\pm} \frac{b_\beta(0)}{|x|^{m_\pm-|\beta|}} \partial_x^\beta \quad (\neq 0). \end{aligned}$$

On fait l'hypothèse sur le problème aux limites

$$L(x, \partial_x)u = f \tag{3.5}$$

$$B_-(x, \partial_x)u|_{\theta=\theta_-} = g_- \tag{3.6}$$

$$B_+(x, \partial_x)u|_{\theta=\theta_+} = g_+ \tag{3.7}$$

vérifie les conditions de Lopatinski en dehors de $x = 0$, ce qui assure l'ellipticité du problème aux limites en dehors du coin $x = 0$.

On écrit ensuite les opérateurs $L_0, B_{0,\pm}$ en coordonnées polaires

$$L_0(x, \partial_x) = r^{-2} \tilde{L}_0(r \partial_r, \partial_\theta), \quad B_0(x, \partial_x) = r^{-m_\pm} \tilde{B}_0(r \partial_r, \partial_\theta).$$

Le système

$$\tilde{L}_0(iz, \partial_\theta)v = \varphi \tag{3.8}$$

$$\tilde{B}_{0,-}(iz, \partial_\theta)v(\theta_-) = \psi_- \tag{3.9}$$

$$\tilde{B}_{0,+}(iz, \partial_\theta)v(\theta_+) = \psi_+ \tag{3.10}$$

admet alors une résolvante $R(z)$ méromorphe sur \mathbb{C} selon la théorie de Fredholm analytique (cette condition est en général, en dimension quelconque, encore induite par des hypothèses d'ellipticité de ce système).

Nous précisons dans ce contexte plus restreint les énoncés des Théorèmes 1.2 et 2.2 de Kondratiev dans [22]. Le premier résultat concerne le cas où les opérateurs $L(x, \partial_x)$ et $B_{\pm}(x, \partial_x)$ sont des opérateurs homogènes :

$$L(x, \partial_x) = L_0(x, \partial_x) \quad \text{et} \quad B_{\pm}(x, \partial_x) = B_{0,\pm}(x, \partial_x) .$$

Théorème 7 Supposons que $u \in H^{k+2, k+2-\frac{\alpha}{2}}(\Omega)$ est solution de (3.5) (3.6) (3.7) avec $f \in H^{k_1, k_1-\frac{\alpha_1}{2}}(\Omega)$ et $g_{\pm} \in H^{k_1+2-m_{\pm}-\frac{1}{2}, k_1+2-m_{\pm}-\frac{1}{2}-\frac{\alpha_1}{2}}(\mathbb{R}_+^*)$ avec

$$h_1 = \frac{2k_1 + 4 - 2 - \alpha_1}{2} > \frac{2k + 4 - 2 - \alpha}{2} = h, \quad k_1 \geq k.$$

Supposons de plus que la résolvante $R(z)$ du problème (3.8)(3.9)(3.10) n'ait pas de pôle de partie imaginaire h_1 . Alors

$$u = \sum_j \sum_{\nu=0}^{\mu_j-1} a_{j,\nu} r^{-i\lambda_j} \ln^{\nu}(r) \psi_{\nu,j}(\theta) + w(x)$$

où

- la somme sur j est une somme sur les pôles de $R(z)$ appartenant à $\{h < \Im z < h_1\}$ et μ_j étant la multiplicité du pôle λ_j ;
- le reste $w(x)$ appartient à $H^{k_1+2, k_1+2-\frac{\alpha_1}{2}}$ avec

$$\|w\|_{H^{k_1+2, k_1+2-\frac{\alpha_1}{2}}} \leq C \left[\|u\|_{H^{k+2, k+2-\frac{\alpha}{2}}} + \|f\|_{H^{k_1, k_1-\frac{\alpha_1}{2}}} + \|g_{\pm}\|_{H^{k_1+2-m_{\pm}-\frac{1}{2}, k_1+2-m_{\pm}-\frac{1}{2}-\frac{\alpha_1}{2}}} \right] .$$

Remarque 6 – Dans l'article [22] de Kondratiev l'énoncé est donné avec les espaces à poids noté $\overset{\circ}{W}_{\alpha}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, (p 231). Avec nos notations, ils coïncident avec $H^{m, m-\frac{\alpha}{2}}$.

- On notera que pour cet énoncé l'entier k_1 , le réel $-\alpha_1$ et donc le réel h_1 peuvent être pris aussi grands que l'on veut. Ainsi si les données sont arbitrairement régulières (et s'annulent à un ordre arbitraire en $x = 0$) on obtient un développement asymptotique complet de u au voisinage de $x = 0$ en calculant tous les pôles de $R(z)$ dans $\{\Im z > h\}$ qui contiennent les pôles de Mu , et les résidus correspondant de Mu en ces points.
- La preuve de ce résultat est la version générale du cas particulier que nous avons présenté au paragraphe précédent. Nous reprendrons ces calculs précisément dans d'autres cas, avec même des données ayant des transformées de Mellin méromorphes, auquel cas les pôles de Mu (et donc le développement asymptotique de u) sont donnés par les pôles de $R(z)$ et les pôles des transformées de Mellin des données.

Le deuxième énoncé concerne le problème complet.

Théorème 8 Supposons que la solution u de (3.5)(3.6) (3.7) appartient à $H^{k+2,k+2-\frac{\alpha}{2}}(\Omega)$ avec $f \in H^{k,k-\frac{\alpha_1}{2}}(\Omega)$ et $g_{\pm} \in H^{k+2-m_{\pm}-\frac{1}{2},k+2-m_{\pm}-\frac{1}{2}-\frac{\alpha_1}{2}}(\mathbb{R}_+^*)$, $\alpha - 2 \leq \alpha_1 < \alpha$ et f, g_{\pm} à support inclus dans $\{r \leq \rho_0\}$. Supposons de plus que la résolvante $R(z)$ du problème (3.8)(3.9) (3.10) n'ait pas de pôle de partie imaginaire $h_1 = \frac{-2-\alpha_1+2k+4}{2}$. Alors

$$u = \sum_j \sum_{\nu=0}^{\mu_j-1} a_{j,\nu} r^{-i\lambda_j} \ln^{\nu}(r) \psi_{\nu,j}(\theta) + w(x)$$

où

- la somme sur j est une somme sur les pôles de $R(z)$ appartenant à $\{h < \Im z < h_1\}$, $h = \frac{-2-\alpha+2k+4}{2}$ et μ_j étant la multiplicité du pôle λ_j ;
- le reste $w(x)$ appartient à $H^{k+2,k+2-\frac{\alpha_1}{2}}$ avec

$$\|w\|_{H^{k+2,k+2-\frac{\alpha_1}{2}}} \leq C \left[\|u\|_{H^{k+2,k+2-\frac{\alpha}{2}}} + \|f\|_{H^{k,k-\frac{\alpha_1}{2}}} + \|g_{\pm}\|_{H^{k+2-m_{\pm}-\frac{1}{2},k+2-m_{\pm}-\frac{1}{2}-\frac{\alpha_1}{2}}} \right].$$

Remarque 7 Ici on a pris $k_1 = k$ avec en plus la limitation $\alpha_1 \geq \alpha - 2$ sur $-\alpha_1$. Cela est dû aux termes d'ordre inférieur de $L(x, \partial_x)$ et $B_{\pm}(x, \partial_x)$, qui doivent intervenir si on veut un développement asymptotique complet de la solution et que l'énoncé ne prend pas en compte.

Ce que nous retiendrons essentiellement de ces énoncés est qu'un développement asymptotique de la solution de (3.5)(3.6)(3.7) est déterminé par les pôles de la résolvante $R(z)$ du problème homogène (3.8)(3.9) (3.10) ². Cela est valable jusqu'à n'importe quel ordre pour le problème homogène pour des données "régulières" et jusqu'à un ordre limité si les opérateurs $L(x, \partial_x)$, $B_{\pm}(x, \partial_x)$ contiennent des termes d'ordre inférieur.

3.4 Types asymptotiques

Dans la section précédente, nous avons vu qu'au moins en première approximation, le développement asymptotique des solutions de (3.5)(3.6)(3.7) est déterminé par l'étude des pôles de la résolvante du problème homogène principal (3.8)(3.9)(3.10) (et éventuellement par les pôles des transformées de Mellin des données). Avant d'introduire des définitions quelques remarques s'imposent :

- L'objectif final de notre travail est d'améliorer la convergence des méthodes de décomposition de domaines aux voisinages des coins. En conséquence nous travaillons uniquement avec des solutions tronquées, $\chi(r)u$, avec $\chi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}_+)$, $\text{supp } \chi \subset \{r \leq 1\}$ et $\chi \equiv 1$ au voisinage de $\{r = 0\}$, voire nous pouvons nous mettre dans la situation $u = \chi(r)u$. Les problèmes elliptiques que nous considérons sont donnés par une formulation variationnelle qui assurent $u \in H^1(\Omega)$. En conséquence, en dimension 2, on peut déjà affirmer que $M[u] = M[\chi u]$ est une fonction holomorphe dans $\{\Im z < 0\}$. Comme les opérateurs $L(x, \partial_x)$ et $B_{\pm}(x, \partial_x)$ sont différentiels la donnée $f \in L^2(\Omega)$ a une transformée de Mellin holomorphe dans $\{\Im z < -1\}$ et les données g_{\pm} ont également une transformée de Mellin holomorphe dans un demi-plan inférieur.

²et éventuellement les pôles des transformées de Mellin des données

- Pour la même raison que précédemment nous limiterons l'étude au problème homogène principal (3.8)(3.9) (3.10). Les résultats de Kondratiev nous assurent que l'on décrit bien ainsi la nature du développement asymptotique des solutions si on ne s'intéresse qu'aux premiers termes du développement asymptotique. On se ramène ainsi à un problème au traitement algébrique "facile".
- Pour déterminer les parties principales $L_0(x, \partial_x)$ et $B_{0,\pm}(x, \partial_x)$, il suffit d'écrire les opérateurs en coordonnées polaires, de considérer $\partial_r, \frac{1}{r}\partial_\theta$ comme des opérateurs d'ordre -1 , la multiplication par r^α comme un opérateur d'ordre α , les opérateurs $r\partial_r$ et ∂_θ comme des opérateurs d'ordre 0 ... et ne garder que les termes de degré d'homogénéité les plus bas.
- Conformément aux remarques de la section précédente et à la description des espaces $H^s(\Omega)$ et $H^s(\mathbb{R}_+^*)$ les données f, g_\pm ne sont pas forcément dans des espaces à poids, correspondant à des transformées de Mellin holomorphes comme dans les énoncés de Kondratiev. Ces transformées de Mellin peuvent avoir des prolongements méromorphes et le développement asymptotique de u fait intervenir à la fois les pôles de la résolvante $R(z)$ et les pôles des transformées de Mellin des données.
- Enfin la régularité du reste importe peu. Nous ne souhaitons travailler que sur les premiers termes du développement asymptotique, le reste étant considéré comme négligeable. Pour les traces sur la droite $\{\Im z = \gamma - \frac{n}{2}\}$ nous écrirons simplement qu'elles sont $L^2(\mathbb{R} + i(\gamma - \frac{n}{2}))$ même si on a en fait plus de régularité dans bien des cas. Nous allons nous focaliser sur la position des pôles des transformées de Mellin et éventuellement sur le calcul des résidus.

Toutes ces remarques conduisent aux définitions suivantes qui facilitent la discussion.

Définition 4 Nous appellerons type asymptotique dans Ω (resp. sur \mathbb{R}_+^*) une collection finie $\mathcal{T} = ((\lambda_j, \mu_j, \varphi_{j,\nu}(\theta), 0 \leq \nu \leq \mu_j - 1))_{j \in \{1, \dots, N\}}$ (resp. $\mathcal{T} = ((\lambda_j, \mu_j))_{j \in \{1, \dots, N\}}$) où λ_j sont des points de $\{\Im z \leq 0\}$, les entiers μ_j sont les multiplicités des pôles en λ_j et $\varphi_{j,\nu} \in L^2((\theta_-, \theta_+))$.

On notera pour $\gamma \geq 0$ $L_{r \leq 1, \mathcal{T}}^{2,\gamma}(\Omega)$ (resp. $L_{r \leq 1, \mathcal{T}}^{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^*)$) l'ensemble des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ (resp. $u \in L^2(\mathbb{R}_+^*)$) à support dans $\{r \leq 1\}$ dont la transformée de Mellin admet un prolongement méromorphe dans $\{\Im z < \gamma - 1\}$ (resp. $\{\Im z < \gamma - \frac{1}{2}\}$) avec trace $L^2(\mathbb{R} + i(\gamma - 1); L^2(\theta_-, \theta_+))$ (resp. $L^2(\mathbb{R} + i(\gamma - \frac{1}{2}))$) et des pôles donnés par le type asymptotique \mathcal{T} .

Remarque 8 On lit parfois dans la littérature le nom d'ensemble des singularités pour le type asymptotique. Ce dernier terme nous semble plus approprié dans le sens où il correspond au développement asymptotique des données et des solutions au voisinage de $r = 0$. En fait cette notion contient les développements de Taylor d'une fonction \mathcal{C}^∞ en un point intérieur à un ouvert. Il suffit de remplacer l'intervalle (θ_-, θ_+) par le cercle S^1 , $\lambda_j = ij$ et des fonctions $\varphi_{\nu,j}$ égales à $\cos(j\theta), \sin(j\theta)$.

Une élimination simple des pôles de la transformée de Mellin déjà faite dans plusieurs cas conduit à la

Proposition 8 1. Si $u \in L_{r \leq 1, \mathcal{T}}^{2, \gamma}(\Omega)$, avec aucun pôle de \mathcal{T} de partie imaginaire γ , alors on a

$$u(x) = 1_{[0,1]}(r) \sum_{0 \leq \Im \lambda_j < \gamma-1} \sum_{\nu=0}^{\mu_j-1} c_{j,\nu} r^{-i\lambda_j} \ln^\nu(r) \varphi_{j,\nu}(\theta) + w(x)$$

avec $w \in L^{2,\gamma}(\Omega)$ et où les $(\lambda_j, \mu_j, \varphi_{j,\nu})$ sont ceux donnés par \mathcal{T} .

2. Si $u \in L_{r \leq 1, \mathcal{T}}^{2, \gamma}(\mathbb{R}_+^*)$, avec aucun pôle de \mathcal{T} de partie imaginaire γ , alors on a

$$u(r) = 1_{[0,1]}(r) \sum_{0 \leq \Im \lambda_j < \gamma - \frac{1}{2}} \sum_{\nu=0}^{\mu_j-1} c_{j,\nu} r^{-i\lambda_j} \ln^\nu(r) + w(r)$$

avec $w \in L^{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^*)$ et où les (λ_j, μ_j) sont ceux donnés par \mathcal{T} .

La résolution après transformée de Mellin du problème homogène conduit également à la

Proposition 9 Si $u \in H^1(\Omega)$, $\text{supp } u \subset \{r \leq 1\}$ résout le problème homogène (3.8)(3.9)(3.10)

avec $f \in L_{r \leq 1, \mathcal{T}}^{2, \gamma}(\Omega)$, $\gamma \leq 2$, $g_\pm \in L_{r \leq 1, \mathcal{T}_\pm}^{2, \gamma+2-m_\pm-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+^*)$, et si les pôles de \mathcal{T} translatés de $2i\gamma$, les pôles de \mathcal{T}_\pm translatés de $m_\pm i$ et les pôles de la résolvante $R(z)$ ne rencontrent pas $\{\Im z = \gamma + 1\}$ alors $u \in L_{r \leq 1, \mathcal{T}_\infty}^{2, \gamma+2}(\Omega)$ où le type asymptotique \mathcal{T}_∞ se déduit par union (en ajoutant les multiplicités éventuellement) de \mathcal{T} , \mathcal{T}_\pm et des pôles de $R(z)$.

Preuve 19 À partir des hypothèses de la proposition 9 et de la définition 4 on a

- $f \in L_{r \leq 1, \mathcal{T}}^{2, \gamma}(\Omega)$, donc $M(f)$ admet un prolongement méromorphe dans $\{\Im(z) < \gamma - 1\}$, de plus $f \in L^2$,
- de même si $g_\pm \in L_{r \leq 1, \mathcal{T}_\pm}^{2, \gamma+2-m_\pm-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+^*)$ alors $M(g_\pm)$ admet un prolongement méromorphe dans $\{\Im(z) < \gamma + 2 - m_\pm - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\} = \{\Im(z) < \gamma + 1 - m_\pm\}$, de plus $g_\pm \in L^2(\mathbb{R}_+^*)$.

Or on sait que

$$Mu(z) = R(z) \left[M(r^2 f)(z), M(r^{m_\pm} g_\pm)(z) \right]$$

de plus $M(r^2 f)(z) = M(f)(z - 2i)$ et $M(r^{m_\pm} g_\pm)(z) = M(g_\pm)(z - im_\pm)$.

Donc les pôles de $M(f)$ (resp. $M(g)$) sont translatés par $2i$ (resp. $m_\pm i$), et par suite $M(f)(-2i)$ admet un prolongement méromorphe dans $\{\Im(z) < \gamma + 1\}$, de plus $M(g_\pm)(-im_\pm)$ admet un prolongement méromorphe dans $\{\Im(z) < \gamma + 1 - m_\pm + m_\pm\} = \{\Im(z) < \gamma + 1\}$. Si on suppose de plus que les pôles de la résolvante $R(z)$ ne rencontrent pas $\{\Im(z) = \gamma + 1\}$ alors $M(u)$ est une fonction méromorphe dans $\{\Im(z) < \gamma + 1\}$, donc $u \in L_{r \leq 1, \mathcal{T}_\infty}^{2, \gamma+2}(\Omega)$.

Donc le type asymptotique \mathcal{T}_∞ se déduit par union (en ajoutant les multiplicités éventuellement) de \mathcal{T} , \mathcal{T}_\pm et des pôles de $R(z)$.

Remarque 9 D'après la proposition 9, le développement asymptotique de u , fait intervenir les pôles de la résolvante et les pôles des données (f, g_\pm) , des calculs précis seront faits complètement dans des cas particuliers.

3.5 Stratégie pour la décomposition de domaine.

On voit que si l'on décompose un domaine régulier Ω de \mathbb{R}^2 en plusieurs secteurs dont le sommet commun est intérieur à Ω , les types asymptotiques associés au problème aux limites de chaque sous-domaine n'a à priori rien à voir avec la régularité espérée à l'intérieur (H^{m+2} pour un opérateur d'ordre 2 avec données H^m) pour le problème complet. Inversement on peut envisager de faire une décomposition de domaine pour résoudre un problème elliptique dans un secteur non convexe qui va conduire à une partie principale plus singulière que ce que donne à priori la résolution dans chaque sous-domaine. Conformément aux résultats de Kondratiev, les types asymptotiques donnent les parties principales jusqu'à un certain ordre des solutions aux voisinages de $x = 0$. Notons qu'ils ont pour la solution u deux origines :

- a) le type asymptotique des données ;
- b) le type asymptotique associé aux parties principales des opérateurs P_0 et $B_{0,\pm}$.

Indépendamment des données (supposons que les transformées de Mellin des données sont holomorphes dans $\Im z < S_1$ avec S_1 grand) on voit que la décomposition de domaine engendre à priori une mauvaise adéquation des types asymptotiques entre le domaine complet et chaque sous-domaine.

En fait comme cela a été présenté au chapitre 1, nous avons des degrés de liberté dans les méthodes de décomposition de domaine au niveau des conditions d'interfaces. L'idée est donc de déterminer les conditions d'interfaces qui vont faire coïncider les premiers pôles (ceux les plus proches de $z = 0$) des transformées de Mellin des solutions dans chaque sous-domaine avec ceux associés à la solution du problème complet. En outre, on verra au chapitre suivant (chapitre 4) que les conditions d'interface ne sont pas prises au hasard, mais plutôt elles sont choisies de telle sorte qu'elles marchent bien sans coin puis les adapter au voisinage du coin de façon à avoir une bonne convergence. Après avoir construit ces opérateurs, on peut chercher à optimiser les coefficients de telle sorte qu'on obtient des solutions plus régulières près du coin, en pratique cela peut se faire via deux approches :

- La première approche consiste à choisir les conditions d'interface de façon que le résidu sur le premier pôle parasite (associé au sous-domaine et non au domaine complet) soit nul pour des données bien choisies (correspondant au développement asymptotique de la solution du problème complet).
- La deuxième approche consiste à choisir les conditions d'interface de façon à pousser le plus loin possible de $z = 0$ les pôles parasites (i.e. faire monter les exposants des modes parasites dans les développements asymptotiques).

À priori on ne sait pas en avance quelle méthode utiliser, il faut à chaque fois comparer les deux méthodes et voir jusqu'à quel ordre on peut augmenter la régularité de la solution du problème à envisager, ceci fait l'objet des deux chapitres suivants.

La méthode de décomposition de domaine engendre deux types de coins, il y a des coins qui sont intérieurs au domaine complet et des coins qui sont sur le bord du domaine complet. Le traitement de ces deux catégories de coins est légèrement différent. En fait dans le choix des conditions d'interface on doit tenir compte de la nature des coins. Nous montrerons dans le chapitre suivant que pour des coins à l'intérieur du domaine complet ou des coins sur le bord du domaine complet avec condition de Neumann sur le bord,

les conditions de raccord aux interfaces ne doivent pas contenir un terme constant pour avoir un problème bien posé qui autorise des valeurs non nulles au coin. Par contre pour une décomposition de domaine qui engendre des coins sur le bord du domaine complet, avec condition de Dirichlet autorise des termes constants dans les conditions de raccord aux interfaces des sous-domaines.

3.6 Deux remarques importantes.

1. Première remarque :

Nous travaillons avec des opérateurs différentiels à coefficients réels. Il est clair que dans ce cas les développements asymptotiques des solutions doivent être réels pour des données réelles. Cela impose que les pôles associés à la résolvante $R(z)$ du problème homogène doivent présenter des symétries par rapport à l'axe $i\mathbb{R}$ de façon à ce que les premiers termes du développement asymptotique soient réels. Nous vérifierons en fait dans tous les cas qui nous intéressent que les pôles sont exactement sur l'axe imaginaire.

2. Deuxième remarque :

Le problème que nous regardons est issu d'une formulation variationnelle qui assure l'appartenance à H^1 des solutions pour le domaine complet et chaque sous-domaine (Nous prendrons bien soin d'assurer cette condition au niveau des choix des conditions d'interface). Cela élimine la possibilité d'avoir un pôle multiple en $z = 0$. Nous savons donc que les solutions que nous regardons dans le domaine complet ou dans chaque sous-domaine admet un pôle simple.

De ces deux remarques nous déduisons que nous devons nous concentrer sur le traitement des pôles de la forme $z = it$ avec $t > 0$.

Chapitre 4

Décomposition de domaine avec coin sur le bord

4.1 Introduction

Nous mettons ici en oeuvre la stratégie décrite au chapitre précédent à l'aide de la transformation de Mellin dans le cadre de la théorie de Kondratiev qui permet de comprendre l'inadéquation entre les problèmes dans les sous-domaines et le problème global : tout se joue au niveau des types asymptotiques, i.e. les pôles de la résolvante du problème angulaire. En dépit de cette difficulté, F.Nataf a obtenu, à l'aide d'estimations d'énergie, un résultat de convergence pour un opérateur d'ordre 2 dans un carré découpé en quadrillage. Donc l'idée est d'utiliser des conditions d'interface qui contiennent des dérivées tangentes qui sont valables dans un domaine sans coins et de les adapter au niveau du coin afin d'avoir une bonne convergence, des expériences numériques montrent que l'erreur présente des pics très marqués au niveau des coins si on ne fait rien au coin. Une façon d'améliorer la convergence serait d'annuler au coin au premier ordre le terme avec dérivée tangentielle d'ordre 2, puis jouer sur les coefficients des conditions d'interface au voisinage de la singularité pour faire coïncider les pôles des solutions dans les sous-domaines avec ceux de la solution du problème global (voir [10]).

Des calculs préliminaires de F.Nataf et F.Nier dans la situation modèle ($L := -\Delta$, disque découpé en secteurs) valident la pertinence de cette approche.

Le but de ce chapitre est de développer cette approche avec le choix de $L := \eta - \Delta$, $\eta \geq 0$ tant sur le plan théorique que numérique.

4.2 Motivation

Soit Ω un secteur du plan.

On cherche à résoudre l'équation :

$$L(u) = (\eta - \Delta)(u) = f \text{ dans } \Omega, \text{ où } f \in L^2(\Omega).$$

Les conditions d'interface de Taylor d'ordre 2 conduisent, dans la plupart des cas, à des gains en vitesse de convergence par rapport aux conditions de Taylor d'ordre 0 ou celles de Dirichlet dans le cas d'un découpage avec recouvrement (voir [12] F. Nataf et F. Rogier, 1995). Pour cette raison on cherche dans ce travail des opérateurs d'interface sous la forme des opérateurs différentiels d'ordre 2 qui soient une bonne approximation des opérateurs intervenant dans les CLA exactes.

4.3 Construction des conditions d'interface d'ordre 2

On cherche à résoudre le problème $(\eta - \Delta)u = f$ dans \mathbb{R}^2 avec une donnée f dans L^2 par la méthode de décomposition de domaine en secteurs. On doit chercher donc les conditions qu'il faut mettre sur les interfaces.

Il nous a paru intéressant de chercher des conditions d'interface d'ordre 2 en la variable tangentielle de manière à être des bonnes approximations des CLA exactes. Pour fixer les idées on cherche des conditions d'interface d'ordre 2 sous forme :

$$\frac{\partial}{\partial n} + \beta - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \right)$$

où α et β sont deux paramètres positifs.

Nous montrerons que ces conditions d'interface adaptées au secteur ne peuvent pas conduire directement à des bonnes propriétés de convergence au niveau du coin sans les modifications.

4.3.1 Traduction des conditions aux limites artificielles exactes à un secteur du plan sans modification

On travaille avec des conditions d'interface de type :

$$\frac{\partial}{\partial n} + \beta - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \right)$$

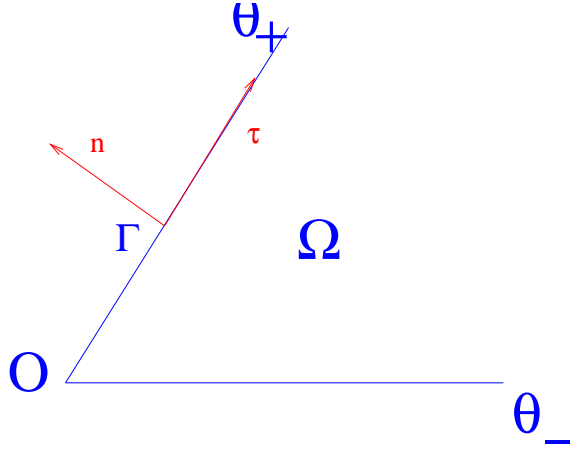
où n est la normale extérieur et τ le vecteur tangent à l'interface.

On remarque que l'opérateur est à coefficients constants ; donc on peut travailler avec les conditions d'interface optimisés du cas régulier :

$$\frac{\partial}{\partial n} + \beta_{opt} - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\alpha_{opt}}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \right)$$

On va étudier l'algorithme 1.2 dans le cas où un sous-domaine noté Ω est un secteur de plan de sommet O et de frontière Γ et on note par n la normale extérieur à Γ et τ le vecteur tangent unitaire (voir figure 4.1).

On notera u_{\pm}^n les valeurs de u dans le sous-domaine adjacent à Ω en $\theta = \theta_{\pm}$. Donc le problème à résoudre dans le sous-domaine Ω est

FIG. 4.1 – Secteur de \mathbb{R}^2 .

$$\begin{cases} (\eta - \Delta)u^{n+1} = f \text{ dans } \Omega \\ \left(\frac{\partial}{\partial n} + \beta - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \right) u^{n+1} = \left(-\frac{\partial}{\partial n} + \beta - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \right) u_+^n \\ \left(\frac{\partial}{\partial n} + \beta - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \right) u^{n+1} = \left(-\frac{\partial}{\partial n} + \beta - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \right) u_-^n \end{cases} \quad (4.1)$$

Pour résoudre le problème $(\eta - \Delta)u(x, y) = f(x, y)$ dans le secteur, on l'écrit en coordonnées polaires.

En effet l'opérateur $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ s'écrit en coordonnées polaires comme

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ &= \frac{1}{r^2} \left[(r \partial_r)^2 + \partial_\theta^2 \right]. \end{aligned}$$

Donc l'équation $(\eta - \Delta)u = f$ devient

$$\left(\eta - \frac{1}{r^2} ((r \partial_r)^2 + \partial_\theta^2) \right) u(r, \theta) = f(x, y).$$

Par passage en coordonnées polaires le problème 4.1 devient

$$\begin{cases} \left(\eta - \frac{1}{r^2} ((r \partial_r)^2 + \partial_\theta^2) \right) u^{n+1}(r, \theta) = f \text{ dans } \Omega \\ \left(-\frac{1}{r} \partial_\theta - \beta_{opt} + \frac{1}{2} \partial_r (\alpha_{opt} \partial_r) \right) u^{n+1}(r, \theta_+) = \left(-\frac{1}{r} \partial_\theta - \beta_{opt} + \frac{1}{2} \partial_r (\alpha_{opt} \partial_r) \right) u_+^n(r, \theta_+) \\ \left(-\frac{1}{r} \partial_\theta + \beta_{opt} - \frac{1}{2} \partial_r (\alpha_{opt} \partial_r) \right) u^{n+1}(r, \theta_-) = \left(-\frac{1}{r} \partial_\theta + \beta_{opt} - \frac{1}{2} \partial_r (\alpha_{opt} \partial_r) \right) u_-^n(r, \theta_-) \end{cases}$$

Soit v la solution de

$$(1 - \Delta)(v) = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^2.$$

On pose $e^n = u^n - v^n$, $e_+ = u_+^n - v_+^n$ et $e_- = u_-^n - v_-^n$.

Donc e^{n+1} est solution du problème :

$$\begin{cases} \left(\eta - \frac{1}{r^2}((r\partial_r)^2 + \partial_\theta^2) \right) e^{n+1}(r, \theta) = 0 \\ \left(-\frac{1}{r}\partial_\theta - \beta_{opt} + \frac{1}{2}\partial_r(\alpha_{opt}\partial_r) \right) e^{n+1}(r, \theta_+) = \left(-\frac{1}{r}\partial_\theta - \beta_{opt} + \frac{1}{2}\partial_r(\alpha_{opt}\partial_r) \right) e_+^n(r, \theta_+) \\ \left(-\frac{1}{r}\partial_\theta + \beta_{opt} - \frac{1}{2}\partial_r(\alpha_{opt}\partial_r) \right) e^{n+1}(r, \theta_-) = \left(-\frac{1}{r}\partial_\theta + \beta_{opt} - \frac{1}{2}\partial_r(\alpha_{opt}\partial_r) \right) e_-^n(r, \theta_-) \end{cases}$$

• Partie principale + Homogénéité

On se propose dans cette partie de montrer qu'il ne faut pas considérer dans les problèmes à coins des opérateurs d'interface faisant intervenir des coefficients constants.

Les conditions aux limites absorbantes en θ_\pm sont de la forme

$$\frac{\partial}{\partial n} + \beta_{opt} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\alpha_{opt} \frac{\partial}{\partial r})$$

où n est la normale extérieur, r est la distance au coin, $\alpha_{opt}, \beta_{opt} \in \mathbb{R}_+$.

En écrivant $\partial_r^2 = \frac{1}{r^2} [(r\partial_r)^2 - r\partial_r]$, on voit que ∂_r^2 est un opérateur homogène de degré -2 et comme ∂_n est homogène (en x) de degré -1 donc elle est négligeable au coin par rapport au dérivées tangentielles d'ordre 2 qui est un opérateur d'homogénéité égale à -2 .

Nous travaillons au voisinage de $r = 0$, on néglige alors les termes d'ordre zéro, donc le problème à résoudre dans Ω devient

$$\begin{cases} \left((r\partial_r)^2 + \partial_\theta^2 \right) e^{n+1}(r, \theta) = 0 \\ \left(\frac{1}{2}\partial_r^2 \right) e^{n+1}(r, \theta_+) = \left(\frac{1}{2}\partial_r^2 \right) e_+^n(r, \theta_+) \\ \left(-\frac{1}{2}\partial_r^2 \right) e^{n+1}(r, \theta_-) = \left(-\frac{1}{2}\partial_r^2 \right) e_-^n(r, \theta_-) \end{cases}$$

Par passage en Mellin on obtient

$$\begin{cases} (\partial_\theta^2 - z^2) \hat{e}^{n+1}(z, \theta) = 0 \\ (z^2 + iz) \hat{e}^{n+1}(z, \theta_+) = (z^2 + iz) \hat{e}_+^n(z, \theta_+) \\ (z^2 + iz) \hat{e}^{n+1}(z, \theta_-) = (z^2 + iz) \hat{e}_-^n(z, \theta_-) \end{cases}$$

Comme on s'intéresse à ce qui se passe au voisinage de zéro, on peut supposer que la solution $u(r, \theta)$ est à support compact en r , cela signifie que l'on cherche $\hat{u}(z, \theta)$ comme une fonction méromorphe dans un demi-plan complexe.

Les fonctions méromorphes en z forment un corps, on peut donc simplifier dans les conditions aux interfaces par $(z^2 + iz)$, donc le problème devient

$$\begin{cases} (\partial_\theta^2 - z^2) \hat{e}^{n+1}(z, \theta) = 0 \\ \hat{e}^{n+1}(z, \theta_+) = \hat{e}_+^n(z, \theta_+) \\ \hat{e}^{n+1}(z, \theta_-) = \hat{e}_-^n(z, \theta_-) \end{cases}$$

On remarque que la partie principale homogène du problème aux limites dans un secteur se comporte comme un problème de Dirichlet pour lequel l'information ne passe pas d'un sous domaine à l'autre sans chevauchement. Les conditions d'interface optimisées du cas régulier ne peuvent pas conduire à des bonnes propriétés de convergence

au niveau du coin sans les modifications. Cela est observé numériquement et nous allons mettre en place la stratégie présentée au chapitre précédent pour obtenir un ajustement optimal. (voir [10])

4.3.2 Traduction des conditions aux limites artificielles exactes à un secteur avec modification

L'idée est de mettre un coefficient qui s'annule devant la dérivée tangentielle d'ordre deux (∂_r^2) dans les conditions d'interface pour avoir quelque chose d'homogène de degré -1 , ceci peut se faire en remplaçant α_{opt} par αr , et en remplaçant le coefficient constant β_{opt} par $\frac{\beta}{r}$ pour avoir quelque chose d'homogène de degré -1 . Après multiplication par r les conditions d'interfaces sont données par les opérateurs

$$\text{en } \theta_+ : \partial_\theta + \beta_+ - \frac{\alpha_+}{2}(r\partial_r)^2,$$

$$\text{en } \theta_- : \partial_\theta - \beta_- + \frac{\alpha_-}{2}(r\partial_r)^2.$$

Donc on travaille avec des conditions d'interface de type :

$$\frac{\partial}{\partial n} + \frac{\beta}{r} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\alpha r \frac{\partial}{\partial r})$$

où n est la normale extérieur, r est la distance au coin, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$.

On sait que les conditions d'interfaces optimisées du cas régulier marchent bien loin du coin. En pratique ce que l'on fera sera une fois les coefficients α et β déterminés pour avoir le meilleur comportement au coin, on raccordera la fonction αr avec la constante α_{opt} et la fonction $\frac{\beta}{r}$ avec la constante β_{opt} .¹

4.4 Formulation variationnelle

La résolution numérique dans chaque sous-domaine se fait dans un cadre variationnel. Nous précisons ici les espaces variationnels naturels pour une telle formulation et vérifions ensuite que leur formulation au sens des distributions coïncident avec les problèmes aux limites introduits précédemment. Notons qu'il faut distinguer les deux cas $\beta = 0$ et $\beta \neq 0$. Les espaces variationnels naturels sont distincts dans les deux cas. Le deuxième cas est intéressant quand le coin du sous-domaine est sur un bord du problème global sur lequel on a mis une condition de Dirichlet homogène. En revanche dans les cas où le coin du sous-domaine est sur un bord du domaine global avec condition de Neumann ou carrément à l'intérieur du problème global on doit prendre $\beta = 0$ pour ne pas forcer la valeur de la solution au coin à être nulle.

Ici Ω est un secteur de \mathbb{R}^2 , $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times (\theta_-, \theta_+)$ et on note $\bar{\Omega}$ son adhérence et $\bar{\Omega} \setminus \{O\}$ son adhérence privée du sommet. Nous introduisons les espaces de fonctions régulières

¹Noter que le cas raccord dans le cas $\beta = 0$ consiste tout simplement à garder le coefficient β_{opt} sur toute l'arête.

$\mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega})$ qui est l'espace des restrictions à Ω de fonction \mathcal{C}^∞ à support compact dans \mathbb{R}^2 et $\mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{O\})$ l'espace des éléments de $\mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega})$ dont le support ne rencontre pas le sommet 0. Notons que ces deux espaces contiennent l'espace des fonctions test $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et qu'ils contiennent des fonctions tests permettant l'analyse au bord loin du coin.

Nous introduisons les espaces variationnels suivants :

- G^1 : est le complété de $\mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega})$ pour la norme $\| \cdot \|_{G^1}$ donnée par

$$\|u\|_{G^1}^2 = \int_{\Omega} |u|^2(x) + |\nabla u|^2(x) dx + \int_{\partial\Omega} |(r\partial_r)u|^2(r) \frac{dr}{r},$$

qui fait de G^1 un espace de Hilbert dans lequel $\mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega})$ est dense.

- G_0^1 : est le complété de $\mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{O\})$ pour la norme $\| \cdot \|_{G_0^1}$ donnée par

$$\|u\|_{G_0^1}^2 = \int_{\Omega} |u|^2(x) + |\nabla u|^2(x) dx + \int_{\partial\Omega} |(r\partial_r)u|^2(r) + |u|^2 \frac{dr}{r},$$

qui fait de G_0^1 un espace de Hilbert dans lequel $\mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{O\})$ est dense.

La définition de ces espaces conduit de plus aux propriétés suivantes :

- $G_0^1 \subset G^1 \subset H^1(\Omega)$.
- En conséquence pour tout $u \in G^1$ (ou $u \in G_0^1$) admet une trace dans $H_{loc}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega \setminus \{O\})$. Les conditions supplémentaires contenues dans les normes de G^1 et de G_0^1 ne font que préciser la régularité requise de ces traces et le comportement au voisinage du coin.
- L'inclusion $G_0^1 \subset G^1$ est stricte. En fait G_0^1 ne contient même pas $\mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega})$ puisque une fonction constante égale à 1 au voisinage de 0 vérifie $\int_{\partial\Omega} |u(r)|^2 \frac{dr}{r} = +\infty$.

Sur ces espaces nous considérons les formulations faibles suivantes :

$\beta_{\pm} = \mathbf{0}$:

$$\forall v \in G^1, \quad a_{\alpha_{\pm},0}(u, v) = L_{f,g-,g+}(v) \quad (4.2)$$

$$\text{avec} \quad a_{\alpha_{\pm},0}(u, v) = \int_{\Omega} \eta u(x)v(x) + \nabla u(x)\nabla v(x) dx +$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\alpha_+}{2} (r\partial_r)u(r, \theta_+) (r\partial_r)v(r, \theta_+) \frac{dr}{r} + \int_0^{+\infty} \frac{\alpha_-}{2} (r\partial_r)u(r, \theta_-) (r\partial_r)v(r, \theta_-) \frac{dr}{r}$$

$$\text{et} \quad L_{f,g-,g+}(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx - \int_0^{+\infty} g_+(r)v(r, \theta_+) dr + \int_0^{+\infty} g_-(r)v(r, \theta_-) dr.$$

$\beta_{\pm} \neq \mathbf{0}$:

$$\forall v \in G_0^1, \quad a_{\alpha_{\pm},\beta_{\pm}}(u, v) = L_{f,g-,g+}(v) \quad (4.3)$$

$$\text{avec} \quad a_{\alpha_{\pm},\beta_{\pm}}(u, v) = \int_{\Omega} \eta u(x)v(x) + \nabla u(x)\nabla v(x) dx +$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\alpha_+}{2} (r\partial_r)u(r, \theta_+) (r\partial_r)v(r, \theta_+) \frac{dr}{r} + \int_0^{+\infty} \frac{\beta_+}{r} u(r, \theta_+)v(r, \theta_+) dr$$

$$+ \int_0^{+\infty} \frac{\alpha_-}{2} (r\partial_r)u(r, \theta_-) (r\partial_r)v(r, \theta_-) \frac{dr}{r} + \int_0^{+\infty} \frac{\beta_-}{r} u(r, \theta_-)v(r, \theta_-) dr$$

$$\text{et} \quad L_{f,g-,g+}(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx - \int_0^{+\infty} g_+(r)v(r, \theta_+) dr + \int_0^{+\infty} g_-(r)v(r, \theta_-) dr.$$

Le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de solutions de ces problèmes.

Théorème 9 Pour $\alpha_{\pm} > 0$ et $\beta_{\pm} = 0$ (resp. $\alpha_{\pm} > 0$ et $\beta_{\pm} > 0$) et pour des données (f, g_-, g_+) telles que L_{f, g_-, g_+} définissent une forme linéaire continue sur G^1 (resp. G_0^1) le problème (4.2) (resp. (4.3)) admet une unique solution dans G^1 (resp. G_0^1). C'est une solution faible du problème aux limites

$$\begin{cases} (\eta - \Delta)u = f, & \text{dans } \Omega \\ \left(-\frac{1}{r}\partial_\theta - \frac{\beta_+}{r} + \frac{1}{2}\partial_r(\alpha_+ r \partial_r)\right) u(r, \theta_+) = g_+(r) \\ \left(-\frac{1}{r}\partial_\theta + \frac{\beta_-}{r} - \frac{1}{2}\partial_r(\alpha_- r \partial_r)\right) u(r, \theta_-) = g_-(r). \end{cases} \quad (4.4)$$

Preuve 20 On montre en premier temps que le problème (4.2) admet une unique solution et cette solution est en fait une solution faible de (4.4) avec $\beta_{\pm} = 0$.

La preuve est basée sur le théorème de Lax-Milgram.

Il est clair que $a_{\alpha_{\pm}, 0}$ est une forme bilinéaire, il reste à vérifier qu'elle est continue et coercive.

– Continuité

On note par $\max(a, b)$ (resp. $\min(a, b)$) le maximum (resp. le minimum) entre a et b .

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz on obtient

$$\begin{aligned} |a_{\alpha_{\pm}, 0}(u, v)| &\leq \eta \left(\int_{\Omega} |u|^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v|^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \max\left(\frac{\alpha_+}{2}, \frac{\alpha_-}{2}\right) \left[\int_0^\infty |(r\partial_r)u|(r, \theta_+) |(r\partial_r)v|(r, \theta_+) \frac{dr}{r} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty |(r\partial_r)u|(r, \theta_-) |(r\partial_r)v|(r, \theta_-) \frac{dr}{r} \right] \\ &\leq \eta \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \\ &\quad + \max\left(\frac{\alpha_+}{2}, \frac{\alpha_-}{2}\right) \int_{\partial\Omega} |(r\partial_r)u|(r) |(r\partial_r)v|(r) \frac{dr}{r} \\ &\leq \max\left(\eta, 1, \max\left(\frac{\alpha_+}{2}, \frac{\alpha_-}{2}\right)\right) \left[\|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{\partial\Omega} |(r\partial_r)u|^2(r) \frac{dr}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial\Omega} |(r\partial_r)v|^2(r) \frac{dr}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

il suffit maintenant de majorer chaque terme par $\|u\|_{G^1}$, alors on obtient

$$|a_{\alpha_{\pm}, 0}(u, v)| \leq 3 \max\left(\eta, 1, \frac{\alpha_{\pm}}{2}\right) \|u\|_{G^1} \|v\|_{G^1}$$

– Coercivité

$$\begin{aligned}
|a_{\alpha_{\pm},0}(u, u)| &= \int_{\partial\Omega} (\eta|u|^2 + |\nabla u|^2)(x)dx + \frac{\alpha_{\pm}}{2} \int_0^{\infty} |(r\partial_r u)|^2(r, \theta_{\pm}) \frac{dr}{r} \\
&\geq \min(\eta, 1, \frac{\alpha_{\pm}}{2}) \left[\int_{\partial\Omega} |u|^2 + |\nabla u|^2 + \int_{\partial\Omega} |(r\partial_r u)|^2 \frac{dr}{r} \right] \\
&\geq \min(\eta, 1, \frac{\alpha_{\pm}}{2}) \|u\|_{G^1}^2
\end{aligned}$$

Donc $a_{\alpha_{\pm},0}$ est une forme bilinéaire continue coercive, et comme L_{f,g_+,g_-} est une forme linéaire continue pour de telles données (f, g_+, g_-) , donc d'après théorème de Lax-Milgram il existe une unique solution dans G^1 du problème (4.2).

Avant de montrer que cette solution faible du problème variationnel est une solution du problème aux limites, on montre tout d'abord que toute solution classique du (4.4) (avec $\beta_{\pm} = 0$) est une solution faible de (4.2).

Soit $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$, grâce à la formule de Green on a

$$\int_{\omega} (\Delta u)v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v$$

où $d\sigma$ est la mesure superficielle sur $\partial\Omega$.

Si u est une solution classique de (4.4) alors

$$\int_{\Omega} (\eta - \Delta)u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx. \quad (4.5)$$

En utilisant la formule de Green on obtient

$$\int_{\Omega} (\eta - \Delta)u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} \left(\eta u(x)v(x) + \nabla u(x) \nabla v(x) \right) dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(r, \theta)v(r, \theta)dr. \quad (4.6)$$

Or

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(r, \theta)v(r, \theta)dr = \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial n}(r, \theta_-)v(r, \theta_-)dr + \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial n}(r, \theta_+)v(r, \theta_+)dr \quad (4.7)$$

D'après les conditions aux limites sur les bords $\{\theta = \theta_{\pm}\}$ on a

$$\begin{aligned}
\left(-\partial_n + \frac{1}{2}\partial_r(\alpha_+ r \partial_r) \right) u(r, \theta_+) &= g_+(r) \\
\left(\partial_n - \frac{1}{2}\partial_r(\alpha_- r \partial_r) \right) u(r, \theta_-) &= g_-(r)
\end{aligned}$$

Donc (4.7) devient :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(r, \theta)v(r, \theta)dr &= \int_0^{\infty} g_-(r)v(r, \theta_-)dr - \int_0^{\infty} \frac{\alpha_-}{2}(r\partial_r)u(r, \theta_-)(r\partial_r)v(r, \theta_-)\frac{dr}{r} \\
&\quad - \int_0^{\infty} g_+(r)v(r, \theta_+)dr \\
&\quad - \int_0^{\infty} \frac{\alpha_+}{2}(r\partial_r)u(r, \theta_+)(r\partial_r)v(r, \theta_+)\frac{dr}{r}
\end{aligned} \quad (4.8)$$

Donc les égalités (4.5),..., (4.8) donnent que u est solution de

$$a_{\alpha_{\pm},0}(u, v) = L_{f,g_-,g_+}(v), \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

On en déduit par densité que

$$a_{\alpha_{\pm},0}(u, v) = L_{f,g_-,g_+}(v), \forall v \in G^1$$

De la même manière on montre que :

- le problème variationnel (4.3) admet une unique solution dans G_0^1 ,
- toute solution du problème aux limites (4.4) est une solution du problème variationnel (4.3).

Enfin, on montre qu'une solution du problème variationnel est une solution du problème aux limites, on distinguera le cas où $\beta_{+,-} = 0$ et le cas où $\beta_{+,-} \neq 0$.

• $\beta_{+,-} = 0$

Si $u \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ une solution du problème variationnel (4.4), en effectuant les mêmes intégrations par parties que pour établir la formulation variationnelle (mais dans le sens contraire), et en utilisant la formule de Green, on en déduit que

$\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left((\eta - \Delta)u(x) - f(x) \right) v(x) dx + \\ & \int_0^\infty \left(-\frac{1}{r} \partial_\theta u(r, \theta_+) + \frac{1}{2} \partial_r (\alpha_+ r \partial_r) u(r, \theta_+) - g_+(r) \right) v(r, \theta_+) dr \\ & + \int_0^\infty \left(-\frac{1}{r} \partial_\theta u(r, \theta_-) - \frac{1}{2} \partial_r (\alpha_- r \partial_r) u(r, \theta_-) - g_-(r) \right) v(r, \theta_-) dr = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

En particulier pour $v \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ on a

$$\int_{\Omega} \left((\eta - \Delta)u(x) - f(x) \right) v(x) dx = 0$$

Donc

$$(\eta - \Delta)u = f \text{ dans } \Omega$$

L'équation (4.9) se simplifie sous la forme

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left(-\frac{1}{r} \partial_\theta u(r, \theta_+) + \frac{1}{2} \partial_r (\alpha_+ r \partial_r) u(r, \theta_+) - g_+(r) \right) v(r, \theta_+) dr \\ & + \int_0^\infty \left(-\frac{1}{r} \partial_\theta u(r, \theta_-) - \frac{1}{2} \partial_r (\alpha_- r \partial_r) u(r, \theta_-) - g_-(r) \right) v(r, \theta_-) dr = 0 \end{aligned}$$

D'où on déduit que

$$\left(-\frac{1}{r} \partial_\theta + \frac{1}{2} \partial_r (\alpha_+ r \partial_r) \right) u(r, \theta_+) = g_+(r)$$

et

$$\left(-\frac{1}{r}\partial_\theta - \frac{1}{2}\partial_r(\alpha_- r \partial_r)\right)u(r, \theta_-) = g_-(r)$$

• $\beta_{+,-} \neq 0$

On refait le même raisonnement que dans le cas $\beta_{+,-} = 0$, et on travaille avec des fonctions tests dans $C_0^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{O\})$.

Remarque 10 – On voit que le problème est bien posé pour les coefficients $\alpha_\pm \geq 0$ et $\beta_\pm \geq 0$. Nous prendrons soin dans l’optimisation de ces coefficients de façon à respecter cette contrainte.

- En fait pour $\alpha_+ = \alpha_- = \beta_+ = \beta_- = 0$ le problème variationnel est aussi bien posé pour des bonnes données. Là il suffit de prendre comme espace de travail $H^1(\Omega)$. On peut aussi envisager des situations intermédiaires avec $\alpha_- = 0$ et $\alpha_+ > 0$ par exemple.
- Nous ne détaillons pas les conditions qui assurent que L_{f,g_-,g_+} est une forme linéaire continue. En fait loin du coin, c’est-à-dire pour des données dont le support (compact) ne rencontre pas le coin, la régularité H^{-1} pour f et la régularité $H^{-1/2}$ pour g_\pm suffisent. L’étude de ce qui se passe au coin se fait via le point de vue en Mellin et pour cela nous ferons l’étude plus détaillée du positionnement des pôles de la solution (ou plus précisément de $\chi(r \leq 1)u$ en fonction de la régularité des données).
- Notons enfin que comme cela a été mentionné au chapitre précédent, cette formulation variationnelle assure l’appartenance à $H^1(\Omega)$ de la solution et en conséquence la transformée de Mellin de $\chi(r \leq 1)u$ ne peut pas avoir de pôle multiple en $z = 0$.

4.5 Coin interface bord avec terme d’ordre zéro dans les conditions d’interface

Soit Ω_1 un secteur du plan défini par $\Omega_1 = \mathbb{R}_+^* \times (\theta_-, \theta_+)$ (voir figure 4.2).

On pose $\Omega = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$.

Soit v solution de

$$\begin{cases} (\eta - \Delta)v = f & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.10)$$

On résout le problème (4.10) par méthode de décomposition de domaine en secteurs.

On distingue dans notre étude le cas des conditions de Dirichlet à bord plat et à bord secteur. Nous traitons en premier lieu le cas des conditions de Dirichlet à bord plat, puis nous généralisons le calcul pour un domaine à bord secteur.

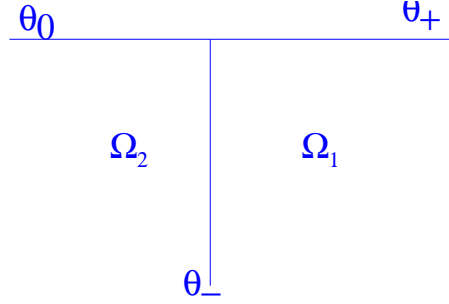


FIG. 4.2 – Secteur au bord plat.

4.5.1 Cas des conditions de Dirichlet à bord plat

Soit le problème défini dans Ω_1 par

$$\begin{cases} (\eta - \Delta)u = f \\ u(r, \theta_+) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \{\theta = \theta_+\} \\ \left(\partial_n + \frac{\beta_-}{r} - \frac{\alpha_-}{2} \partial_r(r \partial_r)\right) u(r, \theta_-) = \left(\partial_n + \frac{\beta_-}{r} - \frac{\alpha_-}{2} \partial_r(r \partial_r)\right) u_-(r, \theta_-) \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \{\theta = \theta_-\} \end{cases}$$

où u_- est la restriction de u dans le domaine voisin.

Par passage en coordonnées polaires, le problème qu'on cherche à résoudre est

$$\begin{cases} \left(\eta - \frac{1}{r^2}((r \partial_r)^2 + \partial_\theta^2)\right) u(r, \theta) = f \\ u(r, \theta_+) = 0 \\ \left(-\frac{1}{r} \partial_\theta + \frac{\beta_-}{r} - \frac{\alpha_-}{2} \partial_r(r \partial_r)\right) u(r, \theta_-) = \left(-\frac{1}{r} \partial_\theta + \frac{\beta_-}{r} - \frac{\alpha_-}{2} \partial_r(r \partial_r)\right) u_-(r, \theta_-) \end{cases}$$

On pose $e = u - v$, $e_- = u_- - v_-$, donc e est solution de

$$\begin{cases} \left(\eta - \frac{1}{r^2}((r \partial_r)^2 + \partial_\theta^2)\right) e(r, \theta) = 0 \\ e(r, \theta_+) = 0 \\ \left(-\frac{1}{r} \partial_\theta + \frac{\beta_-}{r} - \frac{\alpha_-}{2} \partial_r(r \partial_r)\right) e(r, \theta_-) = \left(-\frac{1}{r} \partial_\theta + \frac{\beta_-}{r} - \frac{\alpha_-}{2} \partial_r(r \partial_r)\right) e_-(r, \theta_-) \end{cases} \quad (4.11)$$

On travaille au voisinage de zéro, on néglige les termes d'ordre zéro, donc le problème (4.11) devient

$$\begin{cases} (\partial_\theta^2 + (r \partial_r)^2) e(r, \theta) = 0 \\ e(r, \theta_+) = 0 \\ \left(\partial_\theta - \beta_- + \frac{\alpha_-}{2} (r \partial_r)^2\right) e(r, \theta_-) = g_-(r) \end{cases} \quad (4.12)$$

où α_- et β_- sont deux paramètres positifs et g_- est donnée par :

$$g_-(r) = \left(\partial_\theta - \beta_- + \frac{\alpha_-}{2} (r \partial_r)^2\right) e_-(r, \theta_-) \quad (4.13)$$

La transformée de Mellin appliquée à (4.12) donne

$$\begin{cases} (\partial_\theta^2 - z^2)\hat{e}(z, \theta) &= 0 \\ \hat{e}(z, \theta_+) &= 0 \\ (\partial_\theta - \beta_- - \frac{\alpha_-}{2}z^2)\hat{e}(z, \theta_-) &= \hat{g}_-(z) \end{cases} \quad (4.14)$$

L'équation $(\partial_\theta^2 - z^2)\hat{e}(z, \theta) = 0$, est une équation différentielle ordinaire dont on peut chercher les solutions sous la forme

$$\hat{e}(z, \theta) = a(z)e^{z(\theta - \theta_-)} + b(z)e^{-z(\theta - \theta_+)},$$

où $a(z)$ et $b(z)$ sont deux fonctions qui dépendent de z .

À partir des conditions d'interfaces $a(z)$ et $b(z)$ sont solutions de

$$\begin{cases} e^{z(\theta_+ - \theta_-)}a(z) + b(z) &= 0 \\ (z - \beta_- - \frac{\alpha_-}{2}z^2)a(z) - (z + \beta_- + \frac{\alpha_-}{2}z^2)e^{z(\theta_+ - \theta_-)}b(z) &= \hat{g}_-(z) \end{cases}$$

D'où

$$a(z) = \left[(z - \beta_- - \frac{\alpha_-}{2}z^2) + (z + \beta_- + \frac{\alpha_-}{2}z^2)e^{2z(\theta_+ - \theta_-)} \right]^{-1} \hat{g}_-(z).$$

On voudrait avoir une solution méromorphe dans une zone $\Im(z) \leq \delta$ ce qui correspond à $(e \in H^{1+\delta})$ avec $\delta > 0$ et un pôle simple en $0, i, 2i, \dots$ si \hat{g}_- est bien choisie.

Déterminons les pôles du facteur de $\hat{g}_-(z)$.

Proposition 10 Les pôles à partie imaginaire positive de

$$\left[(z - \beta_- - \frac{\alpha_-}{2}z^2) + (z + \beta_- + \frac{\alpha_-}{2}z^2)e^{2z(\theta_+ - \theta_-)} \right]^{-1} \quad (4.15)$$

sont de la forme

$$z = it, t > 0 \text{ et } \tan(t(\theta_+ - \theta_-)) = \frac{2t}{\alpha_- t^2 - 2\beta_-}.$$

Remarque 11 Les pôles viennent des pôles générés par l'inversion $(P(z)^{-1})$ ou les pôles des seconds membres dans les conditions aux limites. Plus précisément on considère z comme un paramètre et on étudie la famille des problèmes linéaires elliptiques en θ . Dans le cas général le système (4.14) peut s'écrire sous la forme :

$$P(z)\hat{e} = F$$

avec

$$F = \left[0, 0, \hat{g}_-(z) \right]^T$$

$$P(z) = \left[(\partial_\theta^2 - z^2); \gamma_{\theta_+}; \gamma_{|\theta_-}(\partial_\theta - \beta_- - \frac{\alpha_-}{2}z^2) \right]^T$$

où γ est un opérateur de trace.

Là où il existe l'inverse de $P(z)$ sera noté $R(z)$, d'après la théorie de Fredholm analytique (Reed and Simon tome 4), $R(z)$ est une fonction méromorphe dont les pôles sont les points où $P(z)$ n'est pas injective.

Preuve 21 Pour déterminer les pôles de (4.15), il suffit de résoudre l'équation

$$(z - \beta_- - \frac{\alpha_-}{2}z^2) + (z + \beta_- + \frac{\alpha_-}{2}z^2)e^{2z(\theta_+ - \theta_-)} = 0.$$

Donc les pôles sont solutions de

$$e^{2z(\theta_+ - \theta_-)} = \frac{-z + \beta_- + \frac{\alpha_-}{2}z^2}{z + \beta_- + \frac{\alpha_-}{2}z^2}. \quad (4.16)$$

Comme $z \in \mathbb{C}$, on note $z = r + it$ avec r et t deux réels dans \mathbb{R} , par passage au module dans (4.16) après avoir remplacé z par $r + it$ on obtient

$$e^{4r(\theta_+ - \theta_-)} = \frac{(-r + \beta_- + \alpha_- \frac{r^2 - t^2}{2})^2 + t^2(-1 + \alpha_- r)^2}{(r + \beta_- + \alpha_- \frac{r^2 - t^2}{2})^2 + t^2(1 + \alpha_- r)^2}.$$

Pour simplifier les calculs on pose

$$\psi(r) = \frac{(-r + \beta_- + \alpha_- \frac{r^2 - t^2}{2})^2 + t^2(-1 + \alpha_- r)^2}{(r + \beta_- + \alpha_- \frac{r^2 - t^2}{2})^2 + t^2(1 + \alpha_- r)^2}.$$

La preuve que $r = 0$ est basée sur cette égalité

$$\psi(r) - 1 = \frac{-2r(2\beta_- + \alpha_-|z|^2)}{(r + \beta_- + \alpha_- \frac{r^2 - t^2}{2})^2 + t^2(1 + \alpha_- r)^2}.$$

On remarque que $r(\psi(r) - 1) < 0$, donc $\psi(r) - 1$ est de signe contraire que r .

Comme $\theta_+ > \theta_-$ alors on peut déduire :

– Si $r > 0$ on a

$$e^{4r(\theta_+ - \theta_-)} > 1 \text{ et } \psi(r) < 1$$

donc on ne peut pas avoir $r > 0$.

– Si $r < 0$ on a

$$e^{4r(\theta_+ - \theta_-)} < 1 \text{ et } \psi(r) > 1$$

donc on ne peut pas avoir $r < 0$.

Donc on ne peut pas avoir l'égalité entre $e^{4r(\theta_+ - \theta_-)}$ et $\psi(r)$ pour un réel r non nul, donc nécessairement $r = 0$.

Comme nous intéressons aux pôles dont la partie imaginaire est strictement positive donc les pôles sont de la forme $z = it$ et t est solution de :

$$e^{2it(\theta_+ - \theta_-)} = \frac{-it + \beta_- + \frac{\alpha_-}{2}(it)^2}{it + \beta_- + \frac{\alpha_-}{2}(it)^2}. \quad (4.17)$$

En écrivant le second membre de (4.17) sous sa forme exponentielle on obtient :

$$e^{2it(\theta_+ - \theta_-)} = \frac{-it + \beta_- + \frac{\alpha_-}{2}(it)^2}{it + \beta_- + \frac{\alpha_-}{2}(it)^2} = e^{i\pi} e^{-2i \arctan(\frac{\alpha_-}{2}t - \frac{\beta_-}{t})}, \quad (4.18)$$

on en déduit par égalité des arguments des deux nombres complexes dans (4.18) que

$$2t(\theta_+ - \theta_-) = \pi - 2 \arctan\left(\frac{\alpha_- t^2 - 2\beta_-}{2t}\right) \text{mod}(2\pi),$$

d'où l'équation vérifiée par les pôles(dite équation des pôles) est

$$\tan(t(\theta_+ - \theta_-)) = \frac{2t}{\alpha_- t^2 - 2\beta_-}.$$

•Etude de l'équation des pôles

On pose dans toute la suite $x = \frac{\theta_+ - \theta_-}{\pi}$.

En traçant les deux courbes $t \rightarrow \tan(\pi x t)$ et $t \rightarrow \frac{2t}{\alpha_- t^2 - 2\beta_-}$, on peut visualiser la position des solutions de l'équation des pôles :

$$\tan(t(\theta_+ - \theta_-)) = \frac{2t}{\alpha_- t^2 - 2\beta_-}.$$

Nous remarquons qu'il suffit de discuter deux possibilités sur le choix $\sqrt{\frac{2\beta_-}{\alpha_-}}$ par rapport à $\frac{1}{2x}$ pour localiser le premier pôle,(voir les figures 4.3, 4.4).

Ainsi nous possédons deux stratégies :

1. Choisir les conditions d'interface (i.e (α_-, β_-)) de façon que le résidu sur le premier pôle parasite it_1 (associé au sous-domaine et non au domaine complet) soit nul, pour des données bien choisies (correspondantes au développement asymptotique de la solution du problème complet). Ainsi le premier pôle qui intervient est it_2 de plus on a :

$$t_2 > \frac{1}{x} \quad \text{si} \quad \sqrt{\frac{2\beta_-}{\alpha_-}} < \frac{1}{2x};$$

$$t_2 > \frac{3}{2x} \quad \text{si} \quad \sqrt{\frac{2\beta_-}{\alpha_-}} > \frac{3}{2x};$$

$$t_2 > \frac{1}{x} \quad \text{si} \quad \sqrt{\frac{2\beta_-}{\alpha_-}} > \frac{1}{2x}.$$

2. Choisir les conditions d'interface de façon à pousser le premier pôle it_1 le plus loin possible de $z = 0$, ce qui correspond à choisir $\sqrt{\frac{2\beta_-}{\alpha_-}} > \frac{1}{2x}$ (voir figure 4.4), et on a $t_1 \in]\frac{1}{2x}, \frac{1}{x}[$.

Exemple : Pour un angle droit ($\theta_+ - \theta_- = \frac{\pi}{2}$) on a

$$\text{si } \sqrt{\frac{2\beta_-}{\alpha_-}} = \frac{1}{2x} \text{ alors } \beta_- = \frac{\alpha_-}{2} .$$

On remarque que la première stratégie est meilleure que la seconde.

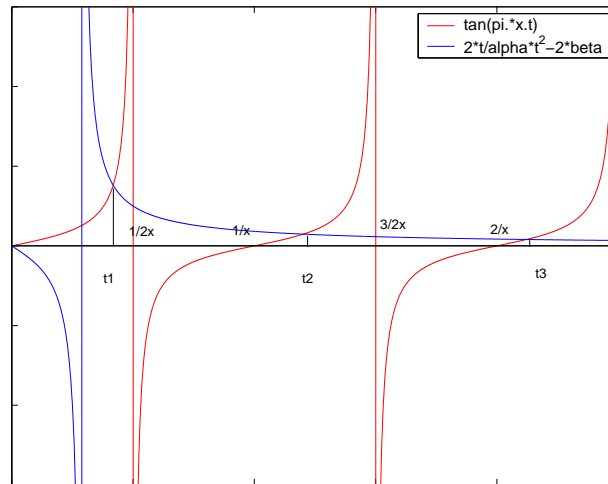


FIG. 4.3 – Cas où $\sqrt{\frac{2\beta_-}{\alpha_-}} < \frac{1}{2x}$.

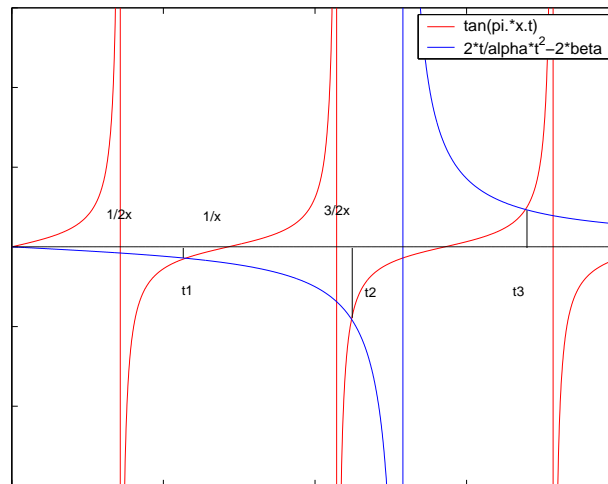


FIG. 4.4 – Cas où $\sqrt{\frac{2\beta_-}{\alpha_-}} > \frac{1}{2x}$.

• **Second membre bien choisi pour le problème de Dirichlet plat**

L'idée est que si g_- est associée à une solution régulière à l'extérieur de Ω_1 alors la solution doit avoir une bonne régularité.

On rappelle que : $g_-(r) = \left(\partial_\theta - \beta_- + \frac{\alpha_-}{2}(r\partial_r)^2 \right) e_-(r, \theta_-)$

Si e_- est C^∞ on espère une très bonne régularité sur e .

Dans la logique de l'asymptotique $r \rightarrow 0$ on travaille seulement avec les premiers termes du développement de Taylor de e_- et on veut que le choix de (α_-, β_-) fasse disparaître le premier pôle en it_1 de e .

On suppose que dans le complémentaire de (θ_-, θ_+) on a la régularité voulue. Le premier type asymptotique doit être : $e_-(x, y) = b_1x + b_2y$

On effectue le changement en coordonnées polaires $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, et comme $e_-(r, \theta_+) = 0$ donc le développement asymptotique au premier ordre de e_- est :

$$e_-(r, \theta) = r \sin(\theta - \theta_+) + o(r), r \leq 1, \quad (4.19)$$

ou encore en prenant $\theta_0 = \theta_+ - \pi$

$$e_-(r, \theta) = -r \sin(\theta - \theta_0) + o(r), r \leq 1. \quad (4.20)$$

Lemme 4 Pour $z \in \mathbb{C} - \{i\}$, on a

$$M(r1_{\{r \leq R\}})(z) = \frac{R^{1+iz}}{1+iz}$$

Preuve 22 On a

$$(-r\partial_r + 1)(r1_{\{r \leq R\}}) = R^2\delta_R(r) \quad (4.21)$$

où δ_R désigne la mesure de Dirac au point R .

Par passage en Mellin dans (4.21) et à savoir que

$$R^2 \int_0^{+\infty} r^{iz} \delta_R(r) \frac{dr}{r} = R^{1+iz}$$

on déduit

$$M(r1_{\{r \leq R\}})(z) = \frac{R^{1+iz}}{1+iz}.$$

Si on revient au problème (4.12) et on choisit comme donnée initiale

$$e_-(r, \theta) = r \sin(\theta - \theta_0)$$

Un simple calcul donne

$$g_-(r) = r \left[\cos(\theta_- - \theta_0) + (-\beta_- + \frac{\alpha_-}{2}) \sin(\theta_- - \theta_0) \right]. \quad (4.22)$$

Ainsi, la seule façon d'avoir $g_-(r) = 0$, est

$$\cos(\theta_- - \theta_0) + \left(-\beta_- + \frac{\alpha_-}{2}\right) \sin(\theta_- - \theta_0) = 0.$$

Donc on obtient une relation entre les paramètres α_- et β_- donnée par :

$$\frac{1}{\tan(\theta_0 - \theta_-)} = -\beta_- + \frac{\alpha_-}{2}, \text{ pour } \theta_0 - \theta_- \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Comme $\theta_+ - \theta_- + \theta_- - \theta_0 = \pi$ donc $\tan(\theta_+ - \theta_-) = \tan(\theta_0 - \theta_-)$, d'où la relation entre α_- et β_- peut être aussi écrite en fonction de θ_+ :

$$\frac{1}{\tan(\theta_+ - \theta_-)} = -\beta_- + \frac{\alpha_-}{2}, \text{ pour } \theta_+ - \theta_- \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Le résultat obtenu dans ce paragraphe se résume dans la proposition 11.

Proposition 11 Dans le cas du problème de Dirichlet plat, un choix optimal(en nombre d'itération) des coefficients α_- , β_- est donné par

$$\frac{1}{\tan(\theta_+ - \theta_-)} = -\beta_- + \frac{\alpha_-}{2}, \text{ pour } \theta_+ - \theta_- \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \quad (4.23)$$

et en particulier si $\theta_+ - \theta_- = \frac{\pi}{2}$ on a $\beta_- = \frac{\alpha_-}{2}$.

4.5.2 Cas des conditions de Dirichlet secteur

Soit Ω_1 un secteur du plan défini par $\Omega_1 = \mathbb{R}_+^* \times (\theta_-, \theta_+)$ (voir figure 4.5). On prend une condition de Dirichlet $u = 0$ sur le bord de $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$.

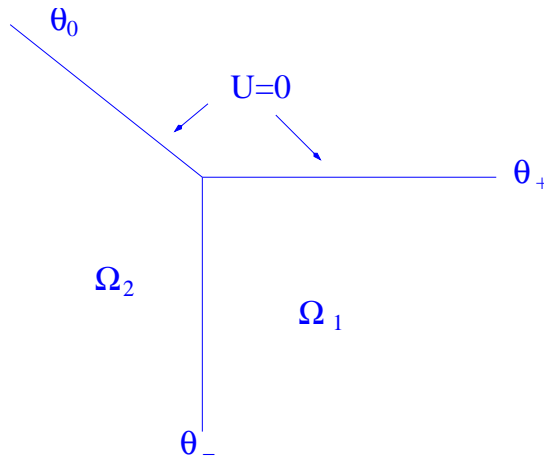


FIG. 4.5 – Domaine au bord secteur.

Les calculs dans Ω_1 sont les mêmes que dans le cas plat $\theta_0 = -\pi$ on aboutit à l'équation :

$$a(z) = \left[(z - \beta_- - \frac{\alpha_-}{2} z^2) + (z + \beta_- + \frac{\alpha_-}{2} z^2) e^{2z(\theta_+ - \theta_-)} \right]^{-1} \hat{g}_-(z).$$

D'après la proposition 10, les pôles à partie imaginaire positive de

$$\left[(z - \beta_- - \frac{\alpha_-}{2} z^2) + (z + \beta_- + \frac{\alpha_-}{2} z^2) e^{2z(\theta_+ - \theta_-)} \right]^{-1}$$

sont de la forme

$$z = it, t > 0 \text{ et } \tan(t(\theta_+ - \theta_-)) = \frac{2t}{\alpha_- t^2 - 2\beta_-}.$$

Ce qui change par rapport au problème de Dirichlet plat c'est le second membre bien choisi. Les types asymptotiques pour le secteur $\mathbb{R}_+^* \times (\theta_0, \theta_+)$ sont donnés par la solution du problème spectral :

$$\begin{cases} (\partial_\theta^2 - z^2)\phi = 0 \\ \phi(\theta_0) = \phi(\theta_+) = 0 \end{cases}$$

Une résolution simple du problème spectral donne :

$$\phi = \sin(n\pi \frac{\theta - \theta_0}{\theta_+ - \theta_-}) \text{ avec } z = \frac{in\pi}{\theta_+ - \theta_0}.$$

On pose dans la suite du calcul $x_0 = \frac{\theta_+ - \theta_0}{\pi}$.

•Second membre bien choisi pour le problème de Dirichlet secteur

Avant d'introduire le comportement asymptotique de la solution du problème de Dirichlet dans un domaine à bord secteur, on rappelle un résultat général de régularité des problèmes de Dirichlet dans un ouvert borné ayant un coin.

Proposition 12 Soit Ω un secteur angulaire de \mathbb{R}^2 défini par $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times (\theta_0, \theta_+)$. Pour une donnée $f \in H^{s,s}$, une solution u du problème

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet un développement asymptotique au voisinage de $r = 0$ donné par

$$u \simeq \sum_{k=1}^{[s-1]} a_k r^{\frac{k}{x_0}} \sin(\frac{k}{x_0}(\theta - \theta_0))$$

Preuve 23 C'est une conséquence des théorèmes de Kondratiev, voir chapitre 3.

On remarque que la condition de Dirichlet impose $u_0 = 0$. Ensuite on se place dans le cas où la fonction f appartient à tous les espaces $H^{s,s}(\Omega)$ de façon à ne traiter que les pôles associés à l'opérateur (et non à la donnée).

Au niveau du terme principal, si on suppose que la donnée e_- , issue de la méthode de

décomposition de domaine est définie dans le complémentaire de Ω_1 , a un développement asymptotique adapté à l'opérateur de Dirichlet dans le secteur complet Ω :

$$e_-(r, \theta) = u_1 r^{\frac{1}{x_0}} \sin\left(\frac{\theta - \theta_0}{x_0}\right) + o(r^{\frac{1}{x_0}}). \quad (4.24)$$

On rappelle que

$$g_-(r) = 1_{\{r \leq R\}} \left(\partial_\theta - \beta_- + \frac{\alpha_-}{2} (r \partial_r)^2 \right) e_-(r, \theta_-). \quad (4.25)$$

En utilisant (4.24) et (4.25) on a

$$g_-(r) = r^{\frac{1}{x_0}} u_1 1_{\{r \leq R\}} \left[\frac{1}{x_0} \cos\left(\frac{\theta_- - \theta_0}{x_0}\right) + (-\beta_- + \frac{\alpha_-}{2x_0^2}) \sin\left(\frac{\theta_- - \theta_0}{x_0}\right) \right].$$

Le passage en Mellin dans g_- , donne

$$\hat{g}_-(z) = \frac{R^{\frac{1}{x_0} + iz}}{\frac{1}{x_0} + iz} u_1 \left[\frac{1}{x_0} \cos\left(\frac{\theta_- - \theta_0}{x_0}\right) + (-\beta_- + \frac{\alpha_-}{2x_0^2}) \sin\left(\frac{\theta_- - \theta_0}{x_0}\right) \right]. \quad (4.26)$$

On veut $\hat{g}_-(it_1) = 0$ et la seule façon de l'avoir est :

$$\frac{1}{x_0} \cos\left(\frac{\theta_- - \theta_0}{x_0}\right) + (-\beta_- + \frac{\alpha_-}{2x_0^2}) \sin\left(\frac{\theta_- - \theta_0}{x_0}\right) = 0.$$

On pose $x = \frac{\theta_+ - \theta_-}{\pi}$ alors $\theta_- - \theta_0 = \pi(x_0 - x)$, donc avec ces notations la relation entre les paramètres α_- et β_- s'écrit :

$$-\beta_- + \frac{\alpha_-}{2x_0^2} = \frac{1}{x_0 \tan\left(\frac{\pi x}{x_0}\right)}$$

Le résultat obtenu dans ce paragraphe se résume dans la proposition 13.

Proposition 13 Pour le problème de Dirichlet secteur, un choix optimal(en nombre d'itération) des coefficients α_- , β_- est donné par

$$-\beta_- + \frac{\alpha_-}{2x_0^2} = \frac{1}{x_0 \tan\left(\frac{\pi x}{x_0}\right)} \quad (4.27)$$

• **Cas particuliers :**

On présente ici quelques types de découpages particuliers en deux sous-domaines.

- Si $\theta_+ - \theta_0 = \pi$ et $\theta_+ - \theta_- = \frac{\pi}{2}$ (voir figure 4.6)

on a alors $x_0 = 1$ et $x = \frac{1}{2}$ donc $\beta_- = \frac{\alpha_-}{2}$. On retrouve les résultats précédents.

- Si $\theta_+ - \theta_0 = \frac{3\pi}{2}$ et $\theta_+ - \theta_- = \frac{\pi}{2}$ (voir figure 4.7)

on a alors $x_0 = \frac{3}{2}$ et $x = \frac{1}{2}$ donc $-\beta_- + \frac{2\alpha_-}{9} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

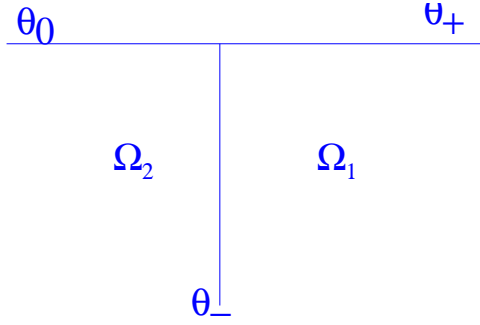


FIG. 4.6 –

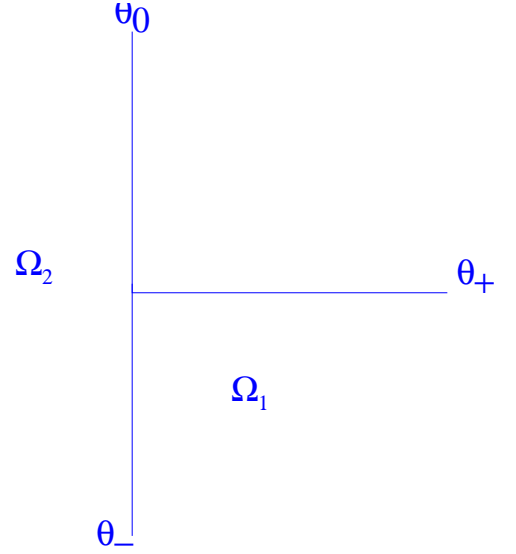


FIG. 4.7 –

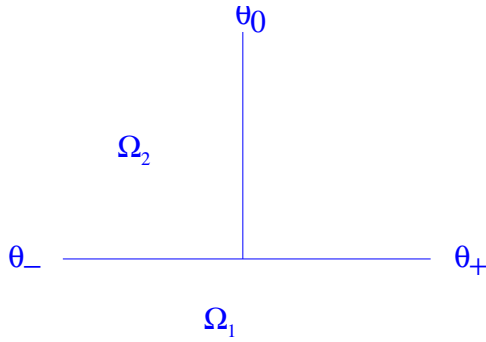


FIG. 4.8 –

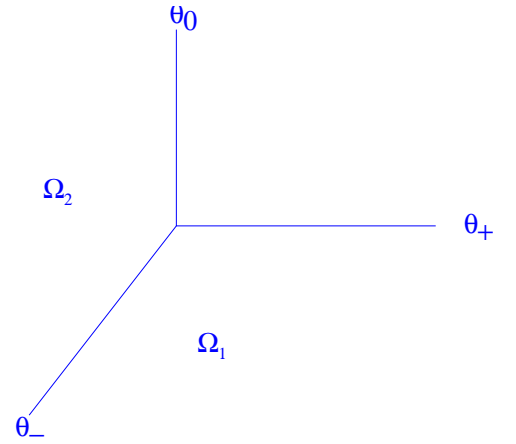


FIG. 4.9 –

- Si $\theta_+ - \theta_0 = \frac{3\pi}{2}$ et $\theta_+ - \theta_- = \pi$ (voir figure 4.8)

on a alors $x_0 = \frac{3}{2}$ et $x = 1$ donc $-\beta_- + \frac{2\alpha_-}{9} = \frac{-2}{3\sqrt{3}}$.

- Si $\theta_+ - \theta_0 = \frac{3\pi}{2}$ et $\theta_+ - \theta_- = \frac{3\pi}{4}$ (voir figure 4.9)

on a alors $x_0 = \frac{3}{2}$ et $x = \frac{3}{4}$ donc $-\beta_- + \frac{2\alpha_-}{9} = 0$.

4.5.3 Cas des conditions de Neumann.

Avec les mêmes notations que précédemment, on notera par Ω_1 un secteur du plan défini par $\Omega_1 = \mathbb{R}_+^* \times (\theta_-, \theta_+)$ comme le montre la figure 4.5.

On se propose de résoudre le même problème que la partie précédente mais au lieu de travailler avec une condition de Dirichlet sur le bord du domaine complet : $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ on travaillera avec une condition de Neumann : $\partial_n u = 0$ sur le bord du domaine Ω , de plus on ne distinguera pas le cas à bord plat et à bord secteur, on va traiter le cas général.

Contrairement au problème de Dirichlet, pour le cas du problème de Neumann il n'est pas nécessaire de discuter l'optimisation par rapport à β_- .

Pour avoir un problème bien posé qui autorise des valeurs non nulles au coin, il faut prendre $\beta_- = 0$.

Donc d'après le calcul déjà fait dans le cas des conditions de Dirichlet à bord secteur, nous résolvons dans cette partie le problème (4.28) défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\partial_\theta^2 + (r\partial_r)^2 \right) e(r, \theta) = 0 \\ \partial_\theta e(r, \theta_+) = 0 \\ \left(\partial_\theta + \frac{\alpha_-}{2} (r\partial_r)^2 \right) e(r, \theta_-) = g_-(r) \end{array} \right. \quad (4.28)$$

Par passage en Mellin dans (4.28) on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_\theta^2 - z^2) \hat{e}(z, \theta) = 0 \\ \partial_\theta \hat{e}(z, \theta_+) = 0 \\ \left(\partial_\theta - \frac{\alpha_-}{2} z^2 \right) \hat{e}(z, \theta_-) = \hat{g}_-(z) \end{array} \right. \quad (4.29)$$

L'équation $(\partial_\theta^2 - z^2) \hat{e}(z, \theta) = 0$, est une équation différentielle ordinaire dont on peut chercher les solutions sous la forme

$$\hat{e}(z, \theta) = a(z) e^{z(\theta - \theta_-)} + b(z) e^{-z(\theta - \theta_+)},$$

où $a(z)$ et $b(z)$ sont deux fonctions qui dépendent de z .

À partir des deux conditions d'interface, on montre facilement que $a(z)$ et $b(z)$ sont solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} z e^{z(\theta_+ - \theta_-)} a(z) - z b(z) = 0 \\ \left(z - \frac{\alpha_-}{2} z^2 \right) a(z) - \left(z + \frac{\alpha_-}{2} z^2 \right) e^{z(\theta_+ - \theta_-)} b(z) = \hat{g}_-(z) \end{array} \right.$$

d'où $a(z)$ est donnée par :

$$a(z) = \frac{1}{z} \left[\left(1 - \frac{\alpha_-}{2} z \right) - \left(1 + \frac{\alpha_-}{2} z \right) e^{2z(\theta_+ - \theta_-)} \right]^{-1} \hat{g}_-(z)$$

Déterminons les pôles du facteur de $\hat{g}_-(z)$.

Proposition 14 Les pôles à partie imaginaire positive de

$$\left[\left(1 - \frac{\alpha_-}{2}z\right) - \left(1 + \frac{\alpha_-}{2}z\right)e^{2z(\theta_+ - \theta_-)} \right]^{-1} \quad (4.30)$$

sont de la forme

$$z = it \quad \text{où } t \text{ est solution de } \tan(t(\theta_+ - \theta_-)) = -\frac{\alpha_-}{2}t$$

Preuve 24 Il suffit de refaire le même raisonnement que la proposition 10.

•**Etude des pôles**

On pose dans toute la suite $x = \frac{\theta_+ - \theta_-}{\pi}$, donc l'équation vérifiée par les pôles devient : $\tan(\pi x t) = -\frac{\alpha_-}{2}t$

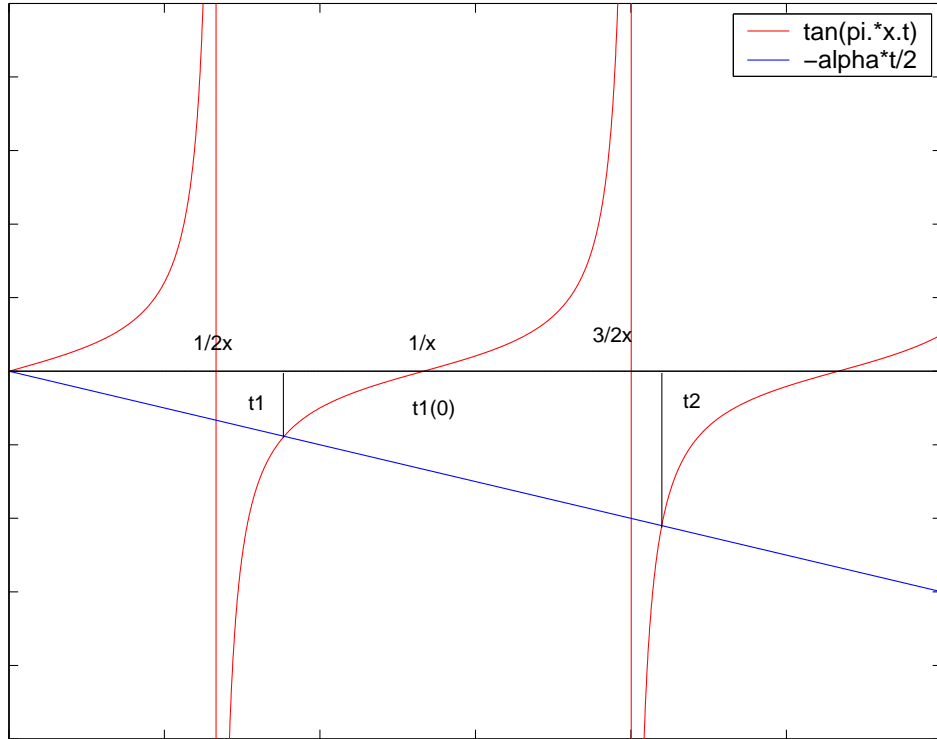


FIG. 4.10 – Détermination de t_1 , pour le problème de Neumann.

D'après la figure 4.10, nous remarquons qu'il suffit de discuter deux possibilités sur le choix de α_- pour localiser le premier pôle it_1 .

On possède deux approches dans cette analyse :

1. Annuler le résidu au premier pôle it_1 (associé au sous-domaine et non au domaine complet) pour le second membre bien choisi (correspond au développement asymptotique de la solution du problème complet), ainsi le premier pôle qui intervient est it_2 .

2. Pousser le premier pôle it_1 le plus loin possible ce qui correspond à choisir α_- très petit.

•**Second membre bien choisi pour le problème de Neumann**

Pour traiter le comportement asymptotique de la solution du problème de Neumann dans un domaine à bord secteur, on rappelle un résultat général de régularité des problèmes de Neumann dans un ouvert ayant un coin.

Remarque 12 Les types asymptotiques pour le secteur $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times (\theta_0, \theta_+)$ sont donnés par la solution du problème spectral :

$$\begin{cases} (\partial_\theta^2 - z^2)\phi = 0 \\ \partial_\theta \phi(\theta_0) = \partial_\theta \phi(\theta_+) = 0 \end{cases}$$

Une résolution simple du problème spectral donne :

$$\phi = \cos(n\pi \frac{\theta - \theta_0}{\theta_+ - \theta_0}) \quad \text{avec} \quad z = \frac{in\pi}{\theta_+ - \theta_0}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

On pose dans la suite du calcul $x_0 = \frac{\theta_+ - \theta_0}{\pi}$.

Proposition 15 Soit Ω un secteur du plan, $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times (\theta_0, \theta_+)$. Pour une donnée $f \in H^{s,s}$, une solution u du problème

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet un développement asymptotique au voisinage de zéro donné par

$$u \simeq \sum_{k=0}^{[s-1]} a_k r^{\frac{k}{x_0}} \cos\left(\frac{k}{x_0}(\theta - \theta_0)\right)$$

Preuve 25 C'est une conséquence immédiate des résultats du chapitre 3.

On remarque que la condition de Neumann n'impose pas $u_0 = 0$.

On se propose maintenant de répondre à la

•**Question : Peut-on optimiser α_- ?**

On remarque, d'après l'étude graphique de l'équation des pôles (voir figure 4.10) que dans tous les cas $t_1 \in]\frac{1}{2x}, \frac{1}{x}[$. On se propose dans cette partie de chercher les valeurs de α_- pour lesquelles on peut annuler le résidu au pôle it_1 .

Au niveau du terme principal, on prend les deux premiers termes du développement asymptotique de u

$$e_-(r, \theta) = u_0 + u_1 r^{\frac{1}{x_0}} \cos\left(\frac{\theta - \theta_0}{x_0}\right). \quad (4.31)$$

On rappelle que

$$g_-(r) = 1_{\{r \leq R\}} \left(\partial_\theta + \frac{\alpha_-}{2} (r \partial_r)^2 \right) e_-(r, \theta_-). \quad (4.32)$$

Un simple calcul utilise (4.31),(4.32) donne :

$$g_-(r) = u_1 r^{\frac{1}{x_0}} 1_{\{r \leq R\}} \left[-\frac{1}{x_0} \sin\left(\frac{\theta_- - \theta_0}{x_0}\right) + \frac{\alpha_-}{2x_0^2} \cos\left(\frac{\pi(x_0 - x)}{x_0}\right) \right]. \quad (4.33)$$

Par passage en Mellin dans (4.33) et d'après le Lemme 4 on a :

$$\hat{g}_-(z) = u_1 \frac{R^{\frac{1}{x_0} + iz}}{\frac{1}{x_0} + iz} \left[-\frac{1}{x_0} \sin\left(\frac{\theta_- - \theta_0}{x_0}\right) + \frac{\alpha_-}{2x_0^2} \cos\left(\frac{\pi(x_0 - x)}{x_0}\right) \right]. \quad (4.34)$$

Donc la seule façon d'avoir $\hat{g}_-(it_1) = 0, \forall u_1$ est :

$$\alpha_- = -2x_0 \tan\left(\frac{\pi x}{x_0}\right). \quad (4.35)$$

Remarque 13 On remarque que dans le cas du problème de Dirichlet (à bord-plat ou à bord secteur) ou de Neumann la stratégie qui consiste à annuler le premier pôle parasite pour des données bien choisies est tout simplement la condition aux limites qui annule complètement la contribution du premier type asymptotique de la solution exacte, voir (4.22),(4.26),(4.34).

Remarque 14 On remarque que la valeur de α_- ne peut pas être toujours positive.

Exemples :

- Pour $\theta_0 = -\pi$ et $\theta_- = -\frac{\pi}{2}$ ce qui revient à choisir $x_0 = 1$ et $x = \frac{1}{2}$, alors d'après (4.35) on a $\alpha_- = \infty$.

- Pour $\theta_0 = -\frac{3\pi}{2}$ et $\theta_- = -\frac{\pi}{2}$ ce qui revient à choisir $x_0 = \frac{3}{2}$ et $x = \frac{1}{2}$, alors d'après (4.35) on a $\alpha_- = -3\sqrt{3}$.

Pour $0 < x < \frac{x_0}{2}$, les valeurs de α_- sont négatives donc on ne peut pas faire disparaître le premier pôle, ainsi il faut opter pour l'autre stratégie qui consiste à pousser le premier pôle le plus loin possible de $z = 0$ ce qui correspond à choisir idéalement $\alpha_- = 0$. En pratique il suffit de prendre α_- petit. Graphiquement, puisque le graphe de $\tan(\pi x t)$ se situe en dessous de sa tangente au point $(\frac{1}{x}, 0)$ pour $t \in (\frac{1}{2x}, \frac{1}{x})$, on voit que le premier pôle t_1 (en fait it_1) apparaît pour $t_1 > T_1$ où T_1 est solution de

$$\pi x \left(T_1 - \frac{1}{x}\right) = -\frac{\alpha_-}{2} T_1.$$

donc T_1 est donné par

$$T_1 = \frac{\pi}{\pi x + \frac{\alpha_-}{2}}.$$

Pour $0 < x < \frac{x_0}{2}$ on a

$$t_1 > T_1 > \frac{2\pi}{\pi x_0 + \alpha_-}.$$

En prenant $\alpha_- < 2\pi - \pi x_0 = 2\pi - (\theta_+ - \theta_0)$ on obtient $t_1 > T_1 > 1$ (ce qui signifie que l'on colle au développement asymptotique du problème complet, modulo une régularité

H^2).

Pour une décomposition du domaine en deux sous-domaines non symétrique, on peut choisir les coefficients α_- dans les deux sous-domaines de la façon suivante :

- Si le premier sous-domaine vérifie la condition $0 < x < \frac{x_0}{2}$, alors on prend

$$\alpha_- < 2\pi - (\theta_+ - \theta_0) .$$

- Pour le second sous-domaine qui correspond à $\frac{x_0}{2} < x < x_0$, on peut choisir α_- positif et sa valeur est donnée par la formule (4.35) de plus sur la courbe 4.10 on voit qu'on améliore beaucoup ainsi la régularité.

Les résultats de ce paragraphe se résument dans la proposition suivante.

Proposition 16 Pour le problème de Neumann, un choix optimal du coefficient α_- est donné par :

1. Si le premier sous-domaine vérifie la condition $0 < x < \frac{x_0}{2}$, alors on prend

$$\alpha_- < 2\pi - (\theta_+ - \theta_0) .$$

2. Pour le second sous-domaine qui correspond à $\frac{x_0}{2} < x < x_0$, on peut choisir α_- positive et sa valeur est

$$\alpha_- = -2x_0 \tan\left(\frac{\pi x}{x_0}\right).$$

4.6 Construction des conditions d'interface

Nous avons dit qu'on travaille avec des conditions d'interface de la forme

$$\frac{\partial}{\partial n} + \frac{\beta}{r} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\alpha r \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

qui sont valable au coin.

Les conditions d'interface se présente de façon générale sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial n} + \beta(r) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\alpha(r)}{2} \frac{\partial}{\partial r} \right) \tag{4.36}$$

où $\alpha(r), \beta(r)$ deux fonctions seront construites de telle sorte que l'opérateur (4.36) soit valable sur toute l'interface entre les deux sous-domaines.

• Méthode de construction des deux fonctions $\alpha(r)$ et $\beta(r)$

On donne ici une méthode de construction des deux fonctions $\alpha(r)$ et $\beta(r)$.

En pratique, une fois les coefficients α et β déterminés pour avoir le meilleur comportement au coin, on raccordera la fonction αr avec la constante α_{opt} et la fonction $\frac{\beta}{r}$ avec la constante β_{opt} , ceci revient à dire :

pour un couple (α, β) fixé, on définit les deux fonctions $\alpha(r), \beta(r)$ comme

$$\alpha(r) = \begin{cases} \alpha r & \text{si } r \leq \frac{\alpha_{opt}}{\alpha} \\ \alpha_{opt} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.37)$$

et

$$\beta(r) = \begin{cases} \frac{\beta}{r} & \text{si } r \leq \frac{\beta}{\beta_{opt}} \\ \beta_{opt} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.38)$$

Les deux fonctions $\alpha(r)$ et $\beta(r)$ sont choisies continues, positives.

Les coefficients α et β sont reliés par la relation (4.23)(resp.(4.27)) dans le cas du Dirichlet plat (resp. dans le cas du Dirichlet secteur).

On peut ainsi fixer α et en déduire β ou inversement. Une manière de fixer les deux coefficients α et β au même temps serait d'imposer que

$$\alpha\beta = \alpha_{opt}\beta_{opt} \quad (4.39)$$

L'équation (4.39), nous donne une deuxième relation fondamentale entre les deux paramètres α et β . Nous pouvons ainsi, donner explicitement les deux constantes optimisés de α et β .

On notera par :

- α^{opt} : le coefficient optimisé de $\alpha(r)$ au voisinage du coin,
- β^{opt} : le coefficient optimisé de $\beta(r)$ au voisinage du coin.

2

Proposition 17 Pour le problème de Dirichlet secteur les coefficients optimisés au coin sont donnés par :

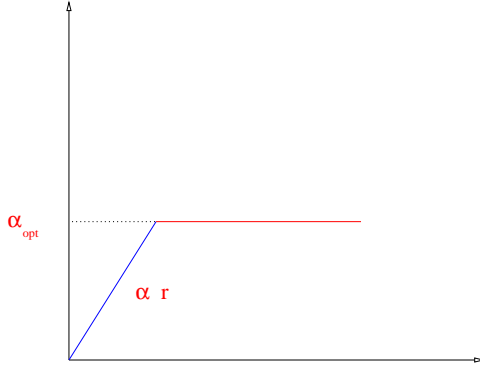
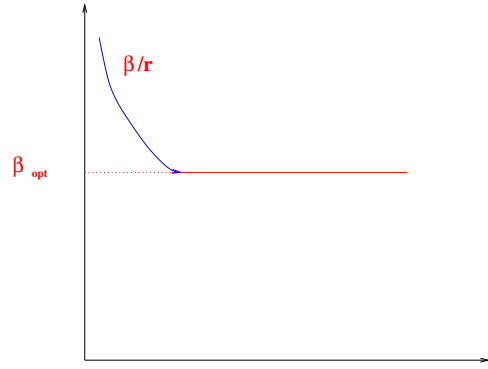
$$\alpha^{opt} = \frac{x_0}{\tan(\pi \frac{x}{x_0})} + \sqrt{\left(\frac{x_0}{\tan(\pi \frac{x}{x_0})}\right)^2 + 2\alpha_{opt}\beta_{opt}x_0^2} \quad (4.40)$$

$$\beta^{opt} = \frac{\alpha_{opt}\beta_{opt}}{\frac{x_0}{\tan(\pi \frac{x}{x_0})} + \sqrt{\left(\frac{x_0}{\tan(\pi \frac{x}{x_0})}\right)^2 + 2\alpha_{opt}\beta_{opt}x_0^2}} \quad (4.41)$$

Pour le cas de Dirichlet à bord plat c'est-à-dire $x_0 = 1$, et pour $x = \frac{1}{2}$ (Interface-bord forme un angle droit) (voir figure 4.2) les coefficients optimisés sont

$$\alpha^{opt} = \sqrt{2\alpha_{opt}\beta_{opt}} \quad (4.42)$$

²On distinguera entre les notations $\alpha_{opt} \neq \alpha^{opt}, \beta_{opt} \neq \beta^{opt}$

FIG. 4.11 – Représentation de la fonction $\alpha(r)$.FIG. 4.12 – Représentation de la fonction $\beta(r)$.

$$\beta^{opt} = \sqrt{\frac{\alpha_{opt}\beta_{opt}}{2}} \quad (4.43)$$

D'autres critères pourraient probablement être envisagés. Les tests numériques sur un pas de maillage h ont montré qu'il est important que α et β soient tels que $\frac{\alpha_{opt}}{\alpha h}$ et $\frac{\beta}{\beta_{opt} h}$ sont de l'ordre de 3 à 4. Cela correspond au nombre de mailles près du coin où les coefficients des deux fonctions $\alpha(r)$ et $\beta(r)$ de la condition d'interface sont variables.

4.7 Discrétisation

4.7.1 Cas à deux sous-domaines : Problème continu

On présente un schéma de discrétisation du problème : $(\eta - \Delta)u = f$ dans un domaine Ω décomposé en deux sous-domaines Ω_1, Ω_2 avec une interface Γ_{12} .

La méthode de Schwarz additive, à laquelle nous nous restreindrons, s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} (\eta - \Delta)u_1^{n+1} = f \quad \text{dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ \left(\partial_{n_1} + \beta(x) - \partial_s\left(\frac{\alpha(x)}{2}\partial_s\right) \right) u_1^{n+1} = \left(-\partial_{n_2} + \beta(x) - \partial_s\left(\frac{\alpha(x)}{2}\partial_s\right) \right) u_2^n \quad \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \overline{\Omega_2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\eta - \Delta)u_2^{n+1} = f \quad \text{dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ \left(\partial_{n_2} + \beta(x) - \partial_s\left(\frac{\alpha(x)}{2}\partial_s\right) \right) u_2^{n+1} = \left(-\partial_{n_1} + \beta(x) - \partial_s\left(\frac{\alpha(x)}{2}\partial_s\right) \right) u_1^n \quad \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \overline{\Omega_1} \end{array} \right.$$

Une discrétisation directe exigerait un calcul des dérivées normales le long de l'interface afin d'évaluer les bonnes conditions de transmission. Ceci peut être évité en introduisant deux nouvelles variables :

$$\begin{aligned}\lambda_1^n &= \left(-\partial_{n_2} + \beta(x) - \partial_s\left(\frac{\alpha(x)}{2}\partial_s\right) \right) u_2^n, \\ \lambda_2^n &= \left(-\partial_{n_1} + \beta(x) - \partial_s\left(\frac{\alpha(x)}{2}\partial_s\right) \right) u_1^n.\end{aligned}$$

L'algorithme de Schwarz s'écrit en fonction de λ_1^n et λ_2^n :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\eta - \Delta)u_1^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ \left(\partial_{n_1} + \beta(x) - \partial_s\left(\frac{\alpha(x)}{2}\partial_s\right) \right) u_1^{n+1} = \lambda_1^n & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \overline{\Omega_2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} (\eta - \Delta)u_2^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ \left(\partial_{n_2} + \beta(x) - \partial_s\left(\frac{\alpha(x)}{2}\partial_s\right) \right) u_2^{n+1} = \lambda_2^n & \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \overline{\Omega_1} \end{array} \right.$$

Nous pouvons interpréter ce nouvel algorithme comme un algorithme de point fixe dans les nouvelles variables $\lambda_j, j = 1, 2$.

Soit le problème sous-structuré :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -\lambda_2 + \left(2\beta(x) - \partial_s(\alpha(x)\partial_s) \right) u_2(\lambda_2, f) \\ \lambda_2 = -\lambda_1 + \left(2\beta(x) - \partial_s(\alpha(x)\partial_s) \right) u_1(\lambda_1, f) \end{array} \right. \quad (4.44)$$

où $u_j = u_j(\lambda_j, f), j = 1, 2$ sont solutions de

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\eta - \Delta)u_j = f & \text{dans } \Omega_j \\ \left(\partial_{n_j} + \beta(x) - \partial_s\left(\frac{\alpha(x)}{2}\partial_s\right) \right) u_j = \lambda_j & \text{sur } \Gamma_{12} \\ u_j = 0 & \text{sur } \partial\Omega_j \cap \partial\Omega \end{array} \right.$$

Au lieu de résoudre le problème à point fixe on peut résoudre le problème sous-structuré en utilisant les méthodes de sous-espaces de Krylov, ce qui correspond à utiliser la méthode de Schwarz.

4.7.2 Cas à deux sous-domaines : Problème discret

La résolution numérique avec le logiciel FreeFem++ consiste à introduire le problème à résoudre dans chaque sous-domaine sous sa formulation faible. La formulation variationnelle du problème pour chaque sous-domaine avec des conditions d'interface de type

$$\partial_n + \beta(x) - \partial_\tau\left(\frac{\alpha(x)}{2}\partial_\tau\right)$$

est donnée par

$$\int_{\Omega_i} \eta u_i^{n+1} v_i + \int_{\Omega_i} \nabla u_i^{n+1} \nabla v_i + \int_{\Gamma_{12}} \beta(x) u_i^{n+1} v_i + \int_{\Gamma_{12}} \frac{\alpha(x)}{2} \partial_s u_i^{n+1} \partial_s v_i = \int_{\Omega_i} f v_i + \int_{\Gamma_{12}} \lambda_i^n v_i; i \in \{1, 2\}$$

Pour simplifier les calculs, on notera dans la suite

$$S = \beta(x) - \partial_s \left(\frac{\alpha(x)}{2} \partial_s \right).$$

Le problème sous-structuré (4.44) est introduit aussi sous sa formulation faible à laquelle on peut associer un système matriciel avec une discrétisation par une méthode d'éléments finis P1-Lagrange. La résolution de ce problème d'interface s'effectue par des méthodes itératives de type Gradient conjugué, dans chaque sous-domaine de façon indépendante.

Une discrétisation par éléments finis du problème (4.44) donne

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\lambda_2 + (2S)B_2u_2 \\ \lambda_2 &= -\lambda_1 + (2S)B_1u_1 \\ \tilde{K}_1u_1 &= f + B_1^T\lambda_1 \\ \tilde{K}_2u_2 &= f + B_2^T\lambda_2 \end{aligned} \tag{4.45}$$

où par abus de notation on note $\lambda_1, \lambda_2, u_1$ et u_2 les degrés de liberté des fonctions éléments finis P1 approchant les fonctions solutions du problème continu et ayant même noms.

\tilde{K}_1, \tilde{K}_2 sont données par :

$$\tilde{K}_j = \eta M_j + K_j + B_j^T (M_{\beta, \Gamma} + K_{\alpha, \Gamma}) B_j, \forall j = 1, 2$$

et B_1 (resp. B_2) est un opérateur de trace de Ω_1 (resp. Ω_2) à valeurs dans Γ_{12} .

En outre les deux matrices M_j et K_j sont la matrice de masse et la matrice de rigidité, respectivement, $M_{\beta, \Gamma}$ est la matrice de masse à l'interface et $K_{\alpha, \Gamma}$ est la matrice de rigidité à l'interface.

Les deux matrices d'interface sont données par :

$$\begin{aligned} (M_{\beta, \Gamma})_{ij} &= \int_{\Gamma} \beta(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dx, \\ (K_{\alpha, \Gamma})_{ij} &= \int_{\Gamma} \frac{\alpha(x)}{2} \nabla_{\tau} \phi_i(x) \nabla_{\tau} \phi_j(x) dx. \end{aligned}$$

Les fonctions ϕ_i sont les fonctions de base des éléments finis, $\nabla_{\tau} \phi$ est la composante tangentielle de $\nabla \phi$ à l'interface.

Pour des données λ_1 et λ_2 on peut déterminer u_1 et u_2 à partir des deux dernières équations de (4.45).

Si on élimine u_1 et u_2 des deux premières équations de (4.45) on obtient le système sous-structuré :

$$F\lambda = d$$

où

$$F = \begin{pmatrix} I & I - 2SB_2\tilde{K}_2^{-1}B_2^T \\ I - 2SB_1\tilde{K}_1^{-1}B_1^T & I \end{pmatrix}$$

et

$$d = \begin{pmatrix} 2SB_1\tilde{K}_1^{-1}f \\ 2SB_2\tilde{K}_2^{-1}f \end{pmatrix}.$$

Donc le problème revient à résoudre un problème d'inconnu λ . L'optimisation des conditions d'interface accélère la convergence de la méthode de Schwarz additive.

4.8 Maillage adapté à la singularité

Le traitement numérique par méthode d'éléments finis du problème de Dirichlet pour le Laplacien dans un domaine à coins nécessite un maillage adapté à la singularité pour obtenir des majorations d'erreurs optimales du cas régulier.

Soit Ω un ouvert plan polygonal borné dont la frontière Γ a N sommet S_j d'angles ω_j .

On considère le problème suivant :

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$(1) \begin{cases} (\eta - \Delta)u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où la fonction f est donnée dans l'espace de Sobolev $H^n(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$.

On rappelle la formulation variationnelle du problème (1), consiste à chercher $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \eta uv + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v, \langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f v.$$

Nous utiliserons les propriétés de régularités de la solution u dans les espaces de Sobolev à poids, étant donné un N -uplets $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$, on lui associe une fonction $\phi = \phi_{\alpha}$ ayant les propriétés suivantes :

- $\phi \in C^0(\overline{\Omega})$;
- $\phi(x) = r_j^{\alpha_j}(x)$ dans un voisinage de S_j où $r_j(x) = \|x - S_j\|$;
- $\phi(x) > 0$ dans Ω .

On introduit l'espace de Sobolev à poids :

$$W_{\phi}^{m,2}(\Omega) = \{v \in D(\Omega) \text{ tel que } \phi \partial^j v \in L^2(\Omega), 0 \leq |j| \leq m\},$$

où

$$\partial^j v = \frac{\partial^{|j|} v}{\partial_{x_1}^{j_1} \partial_{x_2}^{j_2}}, j = (j_1, j_2), |j| = j_1 + j_2, x = (x_1, x_2).$$

Théorème 10 (G.Raugel)

Si f est donnée dans $H^m(\Omega)$, alors la solution du problème (1) appartient à un espace de Sobolev à poids $W_\phi^{m+2,2}(\Omega)$, pour tout N -uplets $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$ vérifiant

$$\begin{aligned} \alpha_j &= 0 && \text{pour } \omega_j < \frac{\pi}{m+1} \\ \alpha_j &> m+1 - \frac{\pi}{\omega_j} && \text{si } \omega_j \geq \frac{\pi}{m+1} \end{aligned}$$

Preuve 26 voir ([5], Geneviève Raugel).

- Pour obtenir des majorations d'erreurs optimales du cas régulier, nous utiliserons à la place d'une triangulation composée de diamètre uniforme, un maillage dont les triangles deviennent plus petits au voisinage des sommets correspondant aux angles $\omega_j \geq \frac{\pi}{m+1}$.

Étant donnée une suite $h(h > 0)$, de nombres tendant vers zéro, on lui associe une suite régulière de triangulations τ_h qui vérifie l'hypothèse H :

- si K est un triangle de τ_h n'ayant aucun S_j pour sommet, son diamètre h_K satisfait à l'inégalité $h_K \leq C h (\inf_K \phi)^{\frac{1}{m+1}}$,
- si K_j est un triangle de sommet S_j , alors $h_{K_j} \leq C h^{\frac{m+1}{m+1-\alpha_j}}$.

• **Description d'une famille régulière de triangulations, vérifiant l'hypothèse H .**

On désigne par n un entier destiné tendre vers l'infini.

Pour construire une triangulation d'un domaine à coin, il suffit de procéder de la manière suivante : on note par Ω un domaine à coin, la construction du maillage raffiné au coin se fait en deux étapes.

1. On divise le domaine Ω en grands nombres de triangle T fixes ayant au plus un sommet qui soit aussi sommet de Ω ;
2. Si aucun sommet du triangle T n'est sommet du Ω , on divise le triangle T en n^2 triangles égaux suivant la méthode classique.

Exemple :

Si un triangle T ($T = SAB$) a pour sommet S , on le divise en n^2 triangles de la manière suivante.

Notons par λ_1, λ_2 et λ_3 les coordonnées barycentriques relatives respectivement aux points S, A, B .

Pour $i = 1, 2, \dots, n$, on trace le segment de droite d'équation :

$$\lambda_1 = 1 - \left(\frac{i}{n}\right)^{\frac{m+1}{m+1-\alpha_j}}, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0$$

et on divise ce segment en i parties égales, ce qui donne les $(i+1)$ points a_i^k , ($0 \leq k \leq i$) de coordonnées barycentriques :

$$\lambda_1(a_i^k) = 1 - \left(\frac{i}{n}\right)^{\frac{m+1}{m+1-\alpha_j}};$$

$$\lambda_2(a_i^k) = \frac{k}{i}(1 - \lambda_1(a_i^k));$$

$$\lambda_3(a_i^k) = 1 - \lambda_1(a_i^k) - \lambda_2(a_i^k).$$

Finalement, on trace les segments $a_i^k a_{i+1}^k$ et $a_i^k a_{i+1}^{k+1}$, pour $1 \leq i \leq n-1$ et $0 \leq k \leq i$.

Ainsi avec cette méthode on construit un maillage plus raffiné au voisinage du coin.

- Remarque 15**
1. Le raffinement du maillage au voisinage du coin n'est pas une nécessité de la méthode de décomposition de domaine, mais que nous le faisons de façon à nous assurer que ce que nous observons correspond bien à nos prévisions théoriques et n'est pas l'effet d'un filtrage numérique dû à un maillage trop grossier au coin.
 2. Avec ce procédé de raffinement de maillage, la matrice de rigidité conserve les mêmes dimensions et la même structure que si on utilise un maillage uniforme partout.

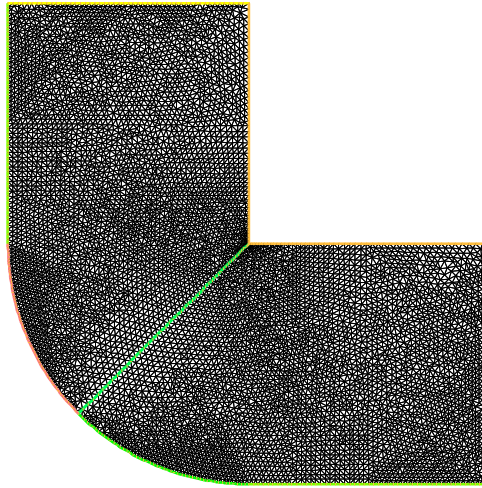


FIG. 4.13 – Décomposition en deux sous-domaines sans recouvrements avec maillage adapté à la singularité.

La figure 4.13 montre le raffinement au voisinage du coin dans le cas où Ω est un secteur d'angle $\frac{3\pi}{2}$.

4.9 Quelques résultats numériques

Nous présentons dans cette section deux types de résultats numériques :

- En premier lieu nous présentons le cas où l'interface entre les deux sous-domaines forme un angle droit avec le bord du domaine global, ceci peut se faire en étudiant le cas où Ω est un rectangle coupé en deux.
- En second lieu, nous traitons le cas où Ω est un secteur sous forme de L coupé en deux secteurs.

On décompose à chaque fois Ω en deux sous-domaines et on utilise un maillage uniforme partout sauf au voisinage du coin, où on utilise un maillage adapté à la singularité.

Nous exécutons toutes nos expériences sur l'équation de l'erreur (on appelle erreur la différence entre la solution exacte du problème et la solution calculée à chaque itération).

Nous avons réalisé un algorithme avec le logiciel FreeFem++ dans le cas d'une décomposition du domaine en deux sous-domaines, on fait varier les valeurs des paramètres des conditions de transmissions, on note que pour les valeurs optimisées on a une convergence plus rapide, et l'erreur est étalée vers le milieu de l'arête. Par contre avec des mauvais coefficients l'erreur reste au coin.

Tous les tests numériques sont réalisés sur un pas de maillage h , ce qui correspond à choisir α et β tels que $\frac{\alpha_{opt}}{\alpha h}$ et $\frac{\beta}{\beta_{opt} h}$ sont de l'ordre de 3. Cela correspond au nombre de mailles près du coin où les coefficients des deux fonctions $\alpha(r)$ et $\beta(r)$ de la condition d'interface sont variables. Dans le cas où $\frac{\alpha_{opt}}{\alpha h}$ et $\frac{\beta}{\beta_{opt} h}$ sont de l'ordre de 0, on dira qu'on travaille sur zéro mailles près du coin.

Nous présentons dans la suite quelques courbes décrivant l'allure de l'erreur en fonction du nombre d'itérations nécessaires pour atteindre le critère : Erreur $< 1.e - 6$. Nous considérons un découpage du domaine en deux sous-domaines et nous regardons la décroissance de la courbe logarithmique de l'erreur en fonction du nombre d'itérations avec

- **COC** : conditions d'interface à coefficients optimisés au coin,
- **CICC** : conditions d'interface à coefficients constants.

4.9.1 Coin interface-bord avec angle droit

On étudie le problème de Dirichlet dans le cas où Ω est un rectangle coupé en deux (voir figure 4.14). Nous sommes donc dans la situation des conditions de Dirichlet à bord plat avec $\theta_+ - \theta_- = \frac{\pi}{2}$. D'après la proposition 11 les coefficients optimisés sont de la forme $\beta_- = \frac{\alpha_-}{2}$.

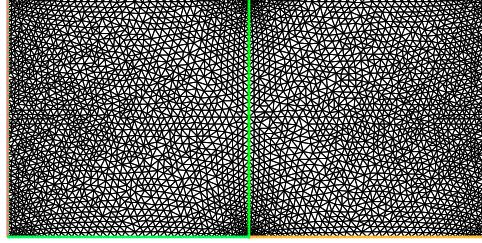


FIG. 4.14 – Décomposition en deux sous-domaines sans recouvrements avec maillage adapté à la singularité.

• Convergence et nombre d'itérations

On donne dans ce paragraphe des résultats numériques qui montrent l'importance de choisir **COC** au coin.

On définit $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ et $|u|_1$ par :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} |u|^2(x) dx$$

$$|u|_1 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2(x) dx$$

Les tableaux 4.1, 4.2 montrent le nombre d'itérations nécessaires pour avoir une erreur de l'ordre de 10^{-6} .

On rappelle que dans les tableaux (4.1), (4.2), (4.3) la colonne “nombre de mailles au coin” correspond au nombre de mailles sur les quelles les coefficients α, β des conditions d'interface sont variables.

Les figures 4.15, 4.16 donnent une comparaison entre l'erreur logarithmique pour le choix de **COC**, **CICC** en fonction des itérations.

La figure 4.17 montre qu'avec les conditions d'interface à coefficients optimisés au coin (**COC**) l'erreur est étalée vers le milieu de l'arête, par contre la figure 4.18, montre qu'avec **CICC** l'erreur reste au coin.

Valeurs au coin	Nombre d'itérations	Nombre de mailles au coin
COC	10	3
CICC	12	0

TAB. 4.1 – Nombre d'itérations en fonction du coefficient choisi au coin, avec $\|\text{erreur}\|_{L^2(\Omega)} < 10^{-6}$.

Valeurs au coin	Nombre d'itérations	Nombre de mailles au coin
COC	10	3
CICC	13	0

TAB. 4.2 – Nombre d'itérations en fonction du coefficient choisi au coin, avec $|\text{erreur}|_1 < 10^{-6}$.

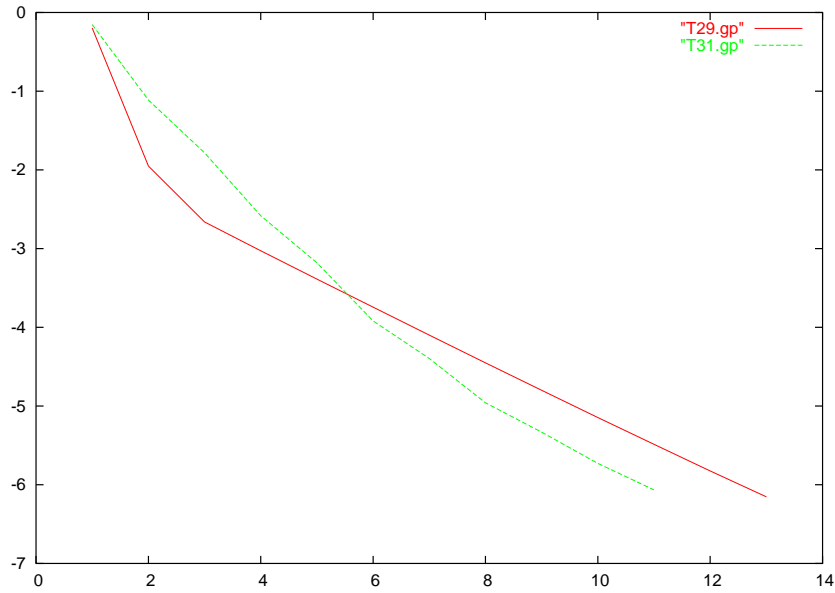


FIG. 4.15 – T29.gp : $\log_{10}(\text{erreur})$ en fonction du nombre d'itérations avec **CICC**,
T31.gp : $\log_{10}(\text{erreur})$ en fonction du nombre d'itérations avec **COC**, pour
 $\|\text{erreur}\|_{L^2(\Omega)} < 10^{-6}$.

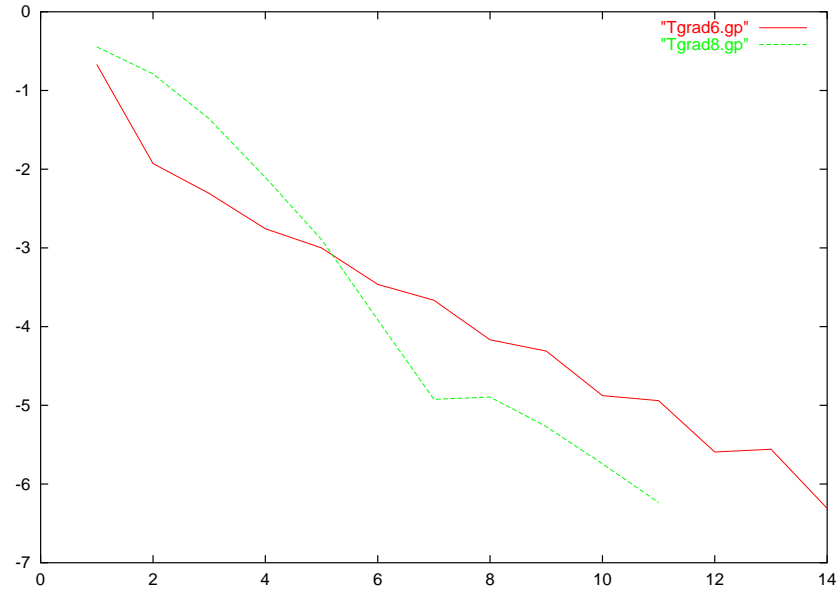


FIG. 4.16 – Tgrad6.gp : $\text{Log}_{10}(\text{erreur})$ en fonction du nombre d'itérations avec **CICC**,
Tgrad8.gp : $\text{Log}_{10}(\text{erreur})$ en fonction du nombre d'itérations avec **COC**,
pour $|\text{erreur}|_1 < 10^{-6}$.

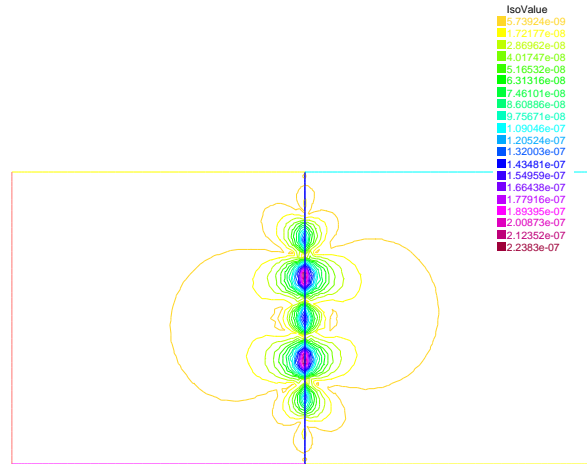


FIG. 4.17 – Les isovaleurs de l'erreur avec **COC** à la 10^{ème} itération sont entre 5.73924×10^{-9} et 2.2383×10^{-7} .

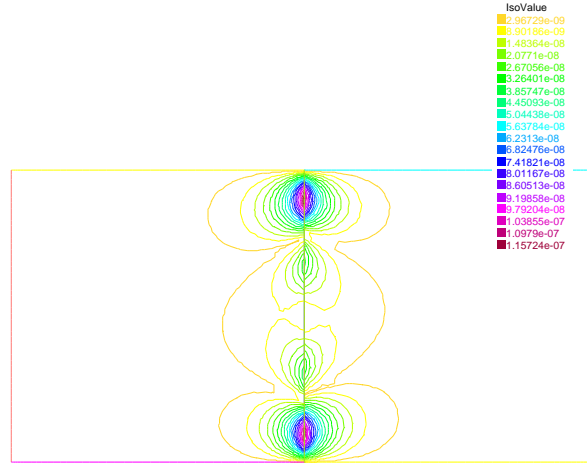


FIG. 4.18 – Les isovaleurs de l’erreur avec **CICC** à la 12^{ème} itération sont entre 2.96729×10^{-9} et 1.15724×10^{-7} .

- **La relation $\beta_- = \frac{\alpha_-}{2}$, est-elle optimale ?**

On traite dans ce paragraphe le cas où $\theta_+ - \theta_- = \frac{\pi}{2}$ et se met dans la situation où le domaine global est à bord plat. D’après la proposition 11 les coefficients optimisés au coin sont reliés par la relation :

$$\beta_- = \frac{1}{2}\alpha_-$$

est une droite de pente $\frac{1}{2}$ inférieur à 1.

Jusqu’à maintenant on a réalisé des expériences numériques qui montrent, qu’avec le **COC** l’erreur s’élimine du coin et l’erreur reste au coin si on met le **CICC**.

Dans cette partie nous présentons quelques expériences numériques qui montrent que la relation entre α_- et β_- due au calcul théorique est optimale dans le sens où les coefficients optimisés sont nécessairement la droite de pente $\frac{1}{2}$.

Le tableau 4.3 montre le nombre d’itérations nécessaire pour avoir une $\| \text{erreur} \|_{L^2} < 10^{-6}$ en fonction du coefficient de la pente et la figure 4.19 décrit la décroissance logarithmique de l’erreur en fonction des itérations.

On remarque que pour des pentes plus grandes que $\frac{1}{2}$ le nombre d’itérations devient de plus en plus grand et il diminue et devient optimal (cas du **COC**) si la valeur de la pente égale à $\frac{1}{2}$, donc les coefficients optimaux (α_- , β_-) sont sur la droite de pente $\frac{1}{2}$. Les figures 4.20, 4.21 montrent que les isovaleurs de l’erreur restent au coin pour une pente non optimale.

Valeurs de la pente	Nombre d'itérations	Nombre de mailles au coin
10	173	3
2	34	3
1	17	3
Pente optimale = $\frac{1}{2}$	10	3
$\frac{1}{10}$	12	3
$\frac{1}{15}$	12	3
$\frac{1}{100}$	15	3

TAB. 4.3 – Nombre d'itérations en fonction du coefficient de la pente, pour un angle droit.

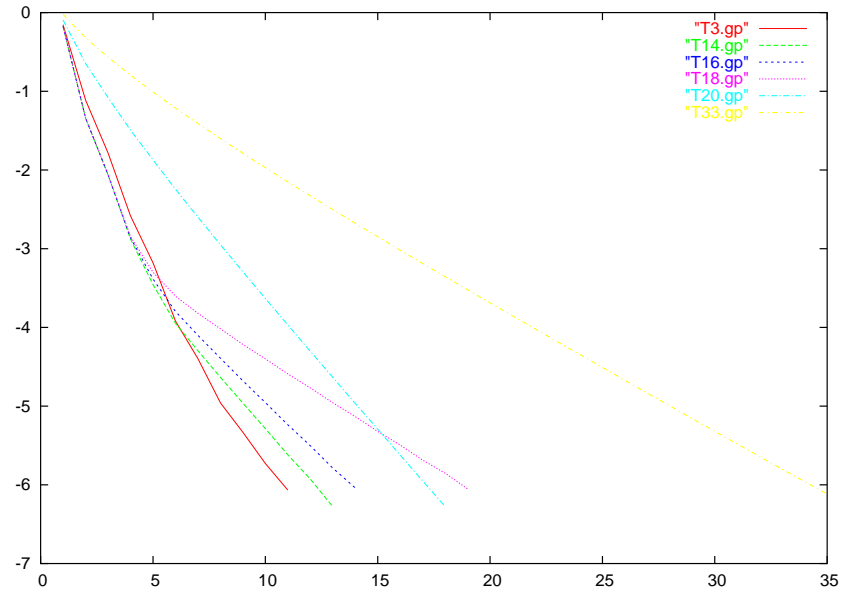


FIG. 4.19 – T3.gp : $\text{Log}_{10}(\text{erreur})$ en fonction du nombre d'itérations avec une pente optimale(=0.5),

Ti, $i \neq 3$.gp : $\text{Log}_{10}(\text{erreur})$ en fonction du nombre d'itérations pour différentes choix non optimisés de la pente.

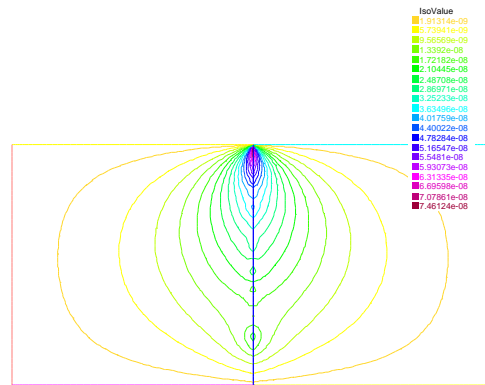


FIG. 4.20 – Les isovaleurs de l'erreur, avec une pente égale à 1, à la 17^{ème} itération sont entre 1.91314×10^{-9} et 7.46124×10^{-8} .

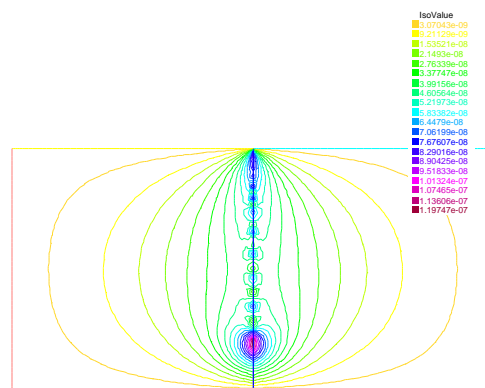
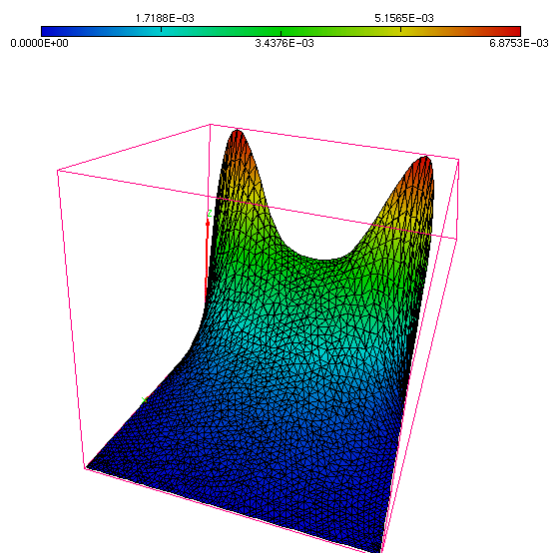
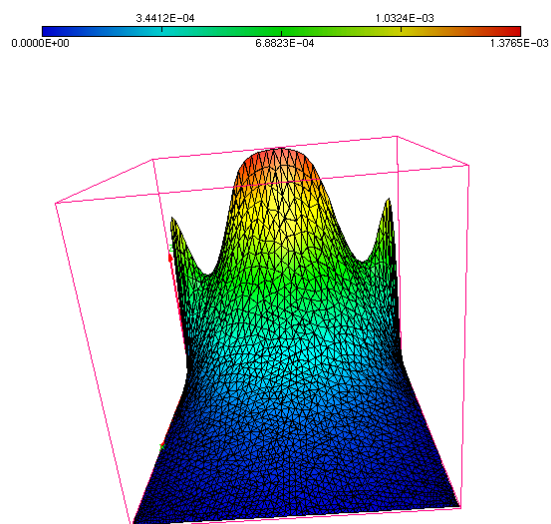
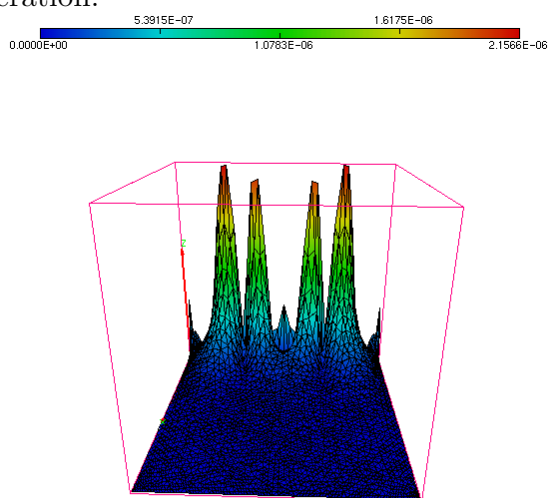
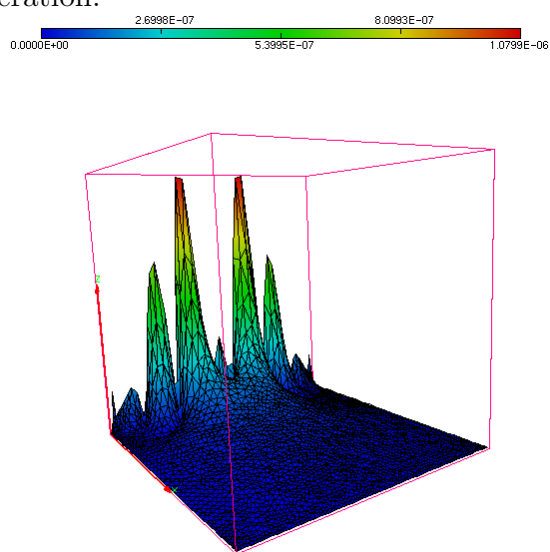


FIG. 4.21 – Les isovaleurs de l'erreur avec une pente égale à 10, à la 173^{ème} itération sont entre 3.07043×10^{-9} et 1.19747×10^{-7} .

• Erreur en 3D

Nous présentons des exemples décrivant l'erreur calculée en norme L^2 en 3D dans le cas d'un rectangle divisé en deux sous-domaines symétriques.

1. Les expériences numériques avec des conditions d'interface bien adaptées aux coins et à coefficients optimisés montrent que la différence entre l'itérée et la solution "exacte" (erreur) est faible dans les deux coins, et l'erreur présente des pics très marqués au milieu de l'arête, voir les figures 4.22,...,4.25.
2. Pour le choix des **CICC**, l'erreur présente des pics très marqués au niveau des coins, donc elle est forte aux coins, voir les figures 4.26,...,4.29.
3. Si on travaille avec des bons coefficients(cas du **COC**) dans l'un des deux coins, et on met une pente non optimale dans le second coin, on remarque que l'erreur est forte au second coin, voir les figures 4.30,...,4.33.

FIG. 4.22 – L'erreur avec **COC** à la première itération.FIG. 4.23 – L'erreur avec **COC** à la 2^{ème} itération.FIG. 4.24 – L'erreur avec **COC** à la 8^{ème} itération.FIG. 4.25 – L'erreur avec **COC** à la dernière itération.

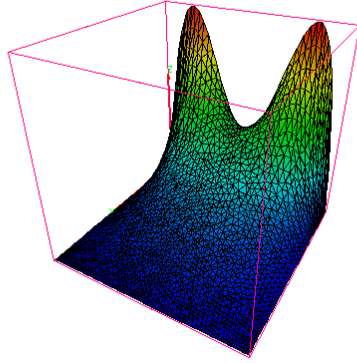
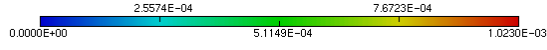


FIG. 4.26 – L'erreur avec **CICC** à la première itération.

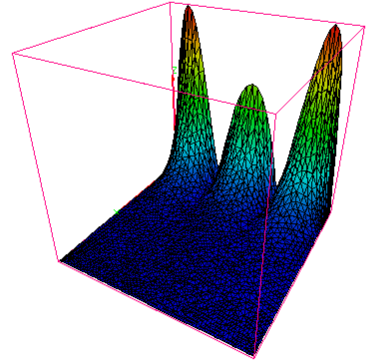
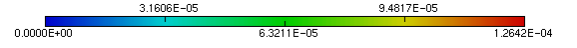


FIG. 4.27 – L'erreur avec **CICC** à la 4^{ème} itération.

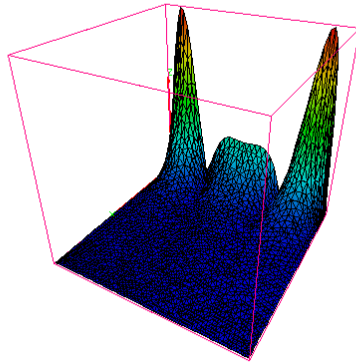
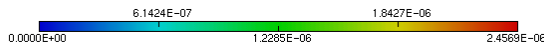


FIG. 4.28 – L'erreur avec **CICC** à la 9^{ème} itération.

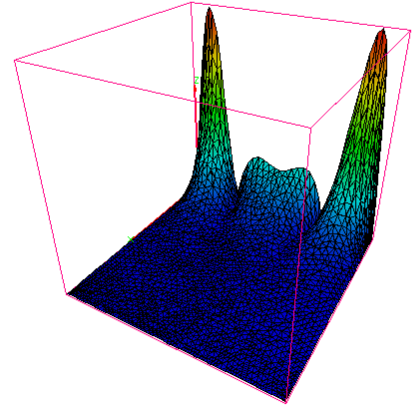
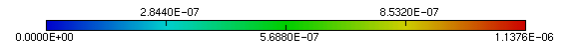


FIG. 4.29 – L'erreur avec **CICC** à la dernière itération (12^{ème} itération).

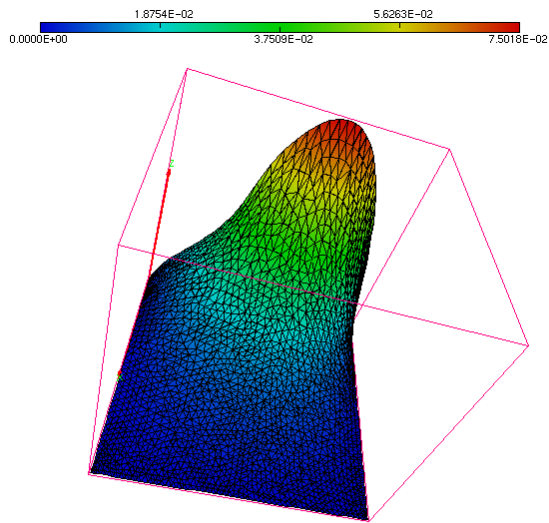


FIG. 4.30 – L'erreur avec une pente non optimale (pente=2) à la première itération.

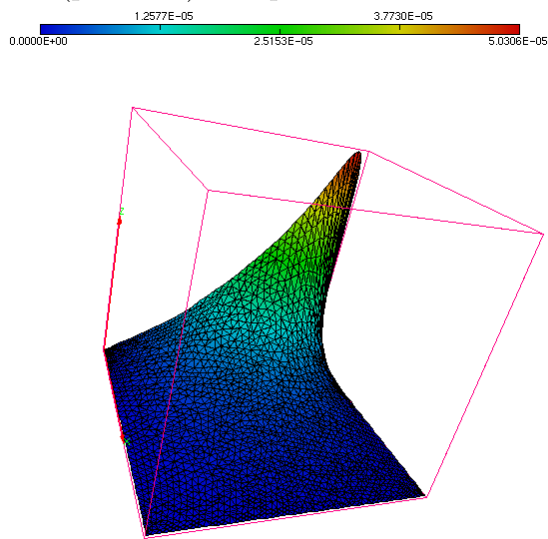


FIG. 4.32 – L'erreur avec une pente non optimale (pente=2) à 33^{ème} (avant dernière) itération.

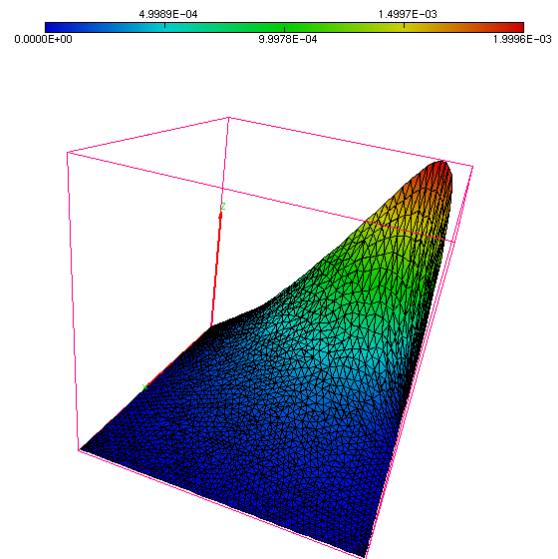


FIG. 4.31 – L'erreur avec une pente non optimale (pente=2) à la 11^{ème} itération.

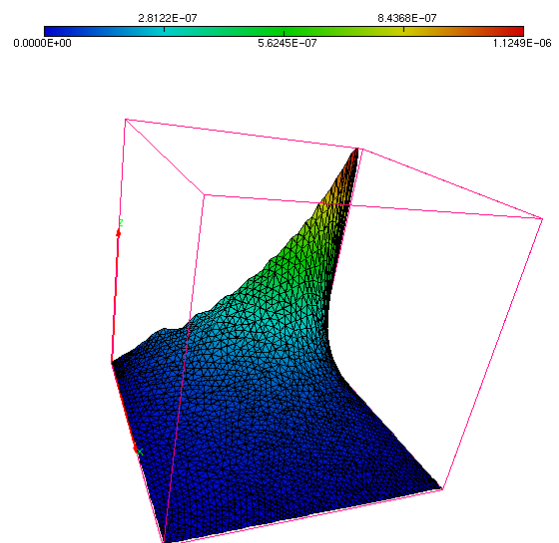


FIG. 4.33 – L'erreur avec une pente non optimale (pente= 2) à la dernière itération().

4.9.2 Coin interface bord avec angle quelconque

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, on étudie le problème de Dirichlet dans le cas où Ω est un secteur sous forme de L (voir figure 4.13) d'angle $\frac{3\pi}{2}$.

D'après la proposition 13 les coefficients optimisés au coin sont reliés par la relation

$$\beta_- = \frac{2}{9}\alpha_- - \frac{2}{3} \frac{1}{\tan(\frac{2}{3}\theta)}, \theta = \theta_+ - \theta_-$$

est une droite de pente $\frac{2}{9}$ inférieur à 1.

•Convergence et nombre d'itérations

Pour une décomposition en deux sous-domaines symétriques, on a :

- Les tableaux 4.4, 4.5 montrent le nombre d'itérations nécessaires pour avoir une erreur de l'ordre de 10^{-6} en fonction du coefficient choisi au coin.
- Les figures 4.34, 4.35 décrivent la décroissance logarithmique de l'erreur en fonction des itérations avec **COC**, **CICC**.
- La figure 4.36 montre qu'avec **COC** l'erreur est étalée vers le milieu de l'arête par contre la figure 4.37 montre qu'avec **CICC** l'erreur reste au coin.

On rappelle que dans les tableaux (4.4), (4.5) et (4.6) la colonne “nombre de mailles au coin” correspond au nombre de mailles sur les quelles les coefficients α, β des conditions d'interface sont variables.

Les opérateurs d'interface avec les paramètres optimisés au coin (**COC**) apportent une meilleure convergence que ceux avec les **CICC**.

Valeurs	Nombre d'itérations	Nombre de mailles au coin
COC	10	3
CICC	13	0

TAB. 4.4 – Nombre d'itérations en fonction du coefficient choisi au coin, avec $\| \text{erreur} \|_{L^2(\Omega)} < 10^{-6}$.

Valeurs	Nombre d'itérations	Nombre de mailles au coin
COC	9	3
CICC	22	0

TAB. 4.5 – Nombre d'itérations en fonction du coefficient choisi au coin, avec $|\text{erreur}|_1 < 10^{-6}$.

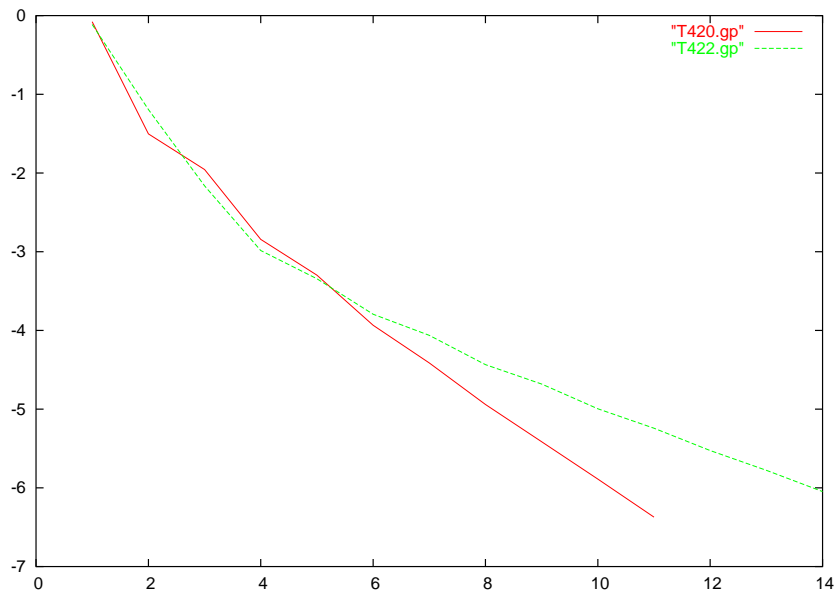


FIG. 4.34 – T420.gp : $\text{Log}_{10}(\text{erreur})$ en fonction des itérations avec **COC**,
T422.gp : $\text{Log}_{10}(\text{erreur})$ en fonction des itérations avec **CICC**, pour
 $\|\text{erreur}\|_{L^2(\Omega)} < 10^{-6}$.

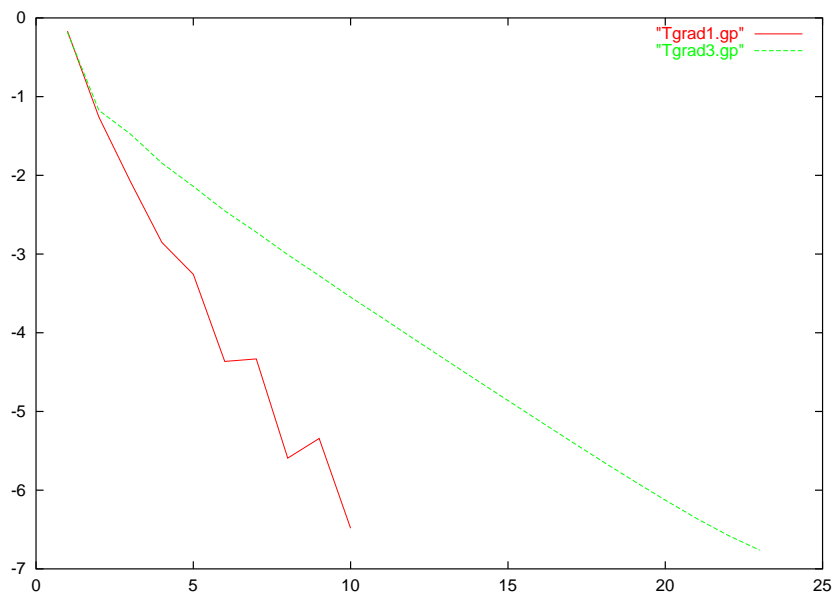


FIG. 4.35 – Tgrad1.gp : $\text{Log}_{10}(\text{erreur})$ en fonction des itérations avec **COC**,
Tgrad3.gp : $\text{Log}_{10}(\text{erreur})$ en fonction des itérations avec **CICC**, pour
 $|\text{erreur}|_1 < 10^{-6}$.

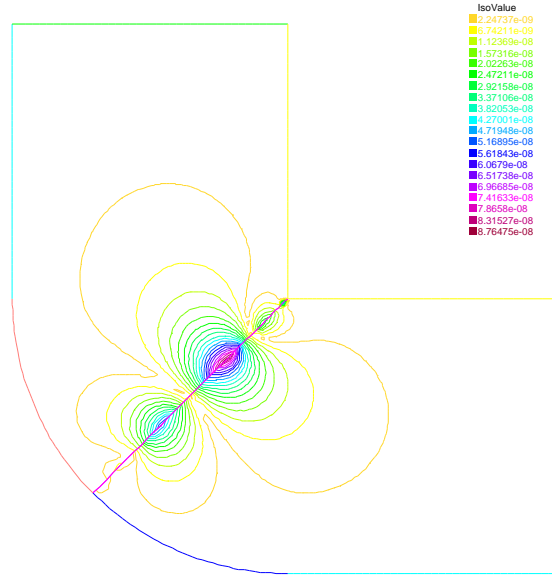


FIG. 4.36 – Les isovaleurs de l’erreur à la 10^{ème} itération, avec **COC**, sont entre 2.24737×10^{-9} et 8.76475×10^{-8} .

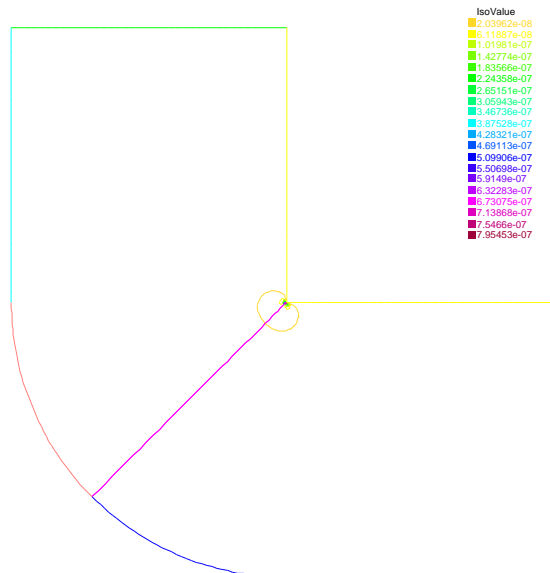


FIG. 4.37 – Les isovaleurs de l’erreur à la 13^{ème} itération, avec **CICC**, sont entre 2.03962×10^{-8} et 7.95453×10^{-7} .

• **Question : La relation $\beta_- = \frac{2}{9}\alpha_- - \frac{2}{3} \frac{1}{\tan(\frac{2}{3}\theta)}$ est elle optimale ?**

La relation entre α_- et β_- est une droite de pente $\frac{2}{9}$. Dans cette partie nous présentons quelques expériences numériques qui montrent que la relation entre α_- et β_- due au calcul théorique est optimale dans le sens où les coefficients optimisés sont nécessairement sur cette droite de pente égale à $\frac{2}{9}$. Nous restreindrons notre étude à une décomposition symétrique, ce qui correspond à choisir $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

- Le tableau 4.6 montre le nombre d'itérations nécessaires pour avoir une $\| \text{erreur} \|_{L^2} < 10^{-6}$ en fonction du coefficient de la pente.
- La figure 4.38 décrit la décroissance logarithmique de l'erreur en fonction des itérations.

On remarque que pour des pentes plus grandes que 1 le nombre d'itérations devient de plus en plus grand et il diminue et devient optimal (cas du **COC**) si la valeur de la pente égale à $\frac{2}{9}$, donc les coefficients optimaux (α_-, β_-) sont sur la droite de pente $\frac{2}{9}$.

Valeurs de la pente	Nombre d'itérations	Nombre de mailles au coin
20	461	3
10	224	3
5	120	3
2	44	3
1	22	3
Pente optimale = $\frac{2}{9}$	10	3
0.3	10	3
0.05	12	3
0.01	15	3
0.001	15	3

TAB. 4.6 – Nombre d'itérations pour différents choix de la pente.

Conclusion :

- La pente $\frac{2}{9}$ apporte une convergence meilleure (en itération) que les autres valeurs.
- Tous les résultats numériques dans ce paragraphe montrent bien que l'erreur s'élimine du coin pour les coefficients optimisés au coin, et ils sont reliés par la relation : $\beta_- = \frac{2}{9}\alpha_- - \frac{2}{3} \frac{1}{\tan(\frac{2}{3}\theta)}$.

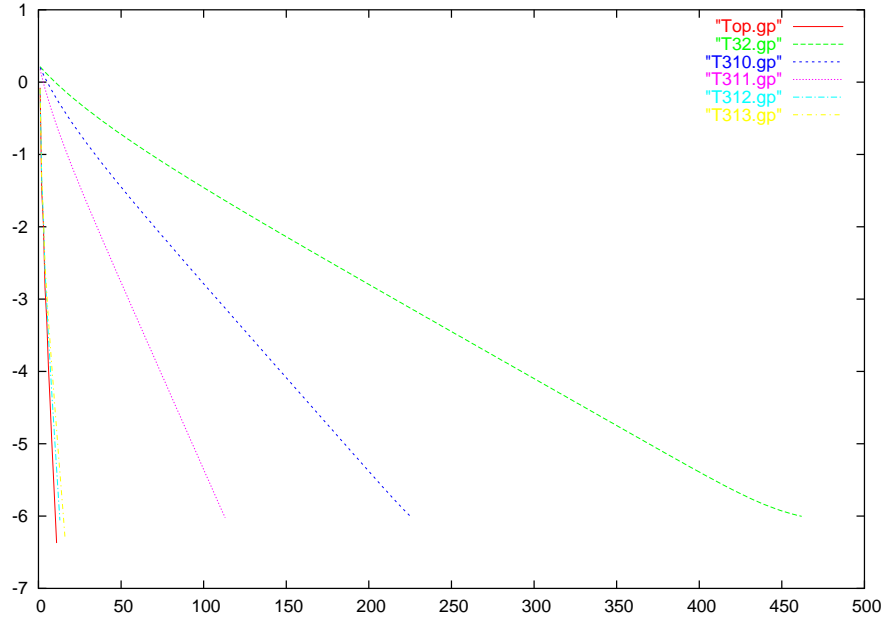


FIG. 4.38 – Top.gp : $\text{Log}_{10}(\text{erreur})$ en fonction des itérations avec une pente optimale $(\frac{2}{9})$,

Ti.gp, $i \neq \text{op}$: $\text{Log}_{10}(\text{erreur})$ en fonction des itérations pour différents choix non optimisés de la pente, $\|\text{erreur}\|_{L^2(\Omega)} < 10^{-6}$.

• Décomposition en deux sous-domaines symétriques

On sait que pour une décomposition en deux sous-domaines symétriques ($\theta = \frac{3\pi}{4}$), et pour des opérateurs d'interface à coefficients optimisés au coin l'erreur est étalée vers le milieu de l'arête, voir la figure 4.36. Par contre les figures 4.39, 4.40 montrent qu'avec des pentes différentes de $\frac{2}{9}$, l'erreur reste au coin de plus la convergence est lente (en nombre d'itérations).

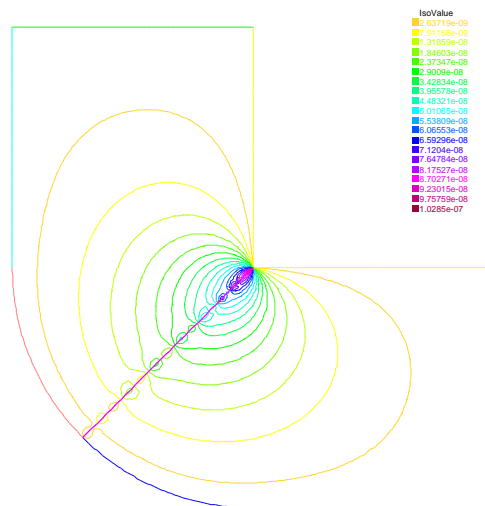


FIG. 4.39 – Les isovaleurs de l'erreur, à la 224^{ème} itération, pour une pente non optimale(= 10), sont entre 2.63719×10^{-9} et 1.0285×10^{-7} .

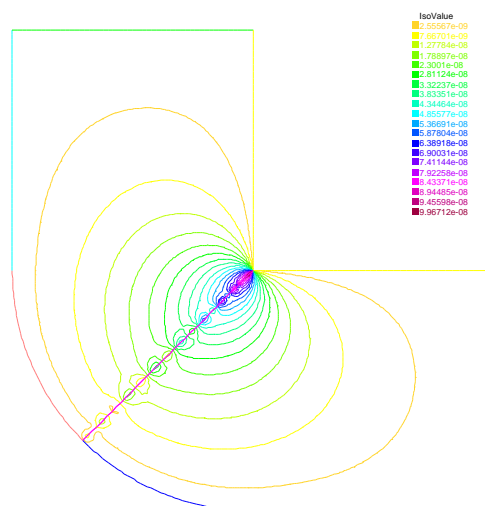


FIG. 4.40 – Les isovaleurs de l'erreur, à la 461^{ème} itération, pour une pente non optimale(= 20), sont entre 2.55567×10^{-9} et 9.96712×10^{-8} .

•Décomposition en deux sous-domaines quelconques

Dans cette partie nous illustrons quelques exemples de décomposition du domaine en deux sous-domaines non symétriques, à priori l'erreur n'est pas forcément symétrique.

On donne deux courbes de convergence de l'erreur dans le cas d'un découpage avec $\theta = \frac{9\pi}{10}$ (voir figure 4.41) et $\theta = \frac{49\pi}{50}$ (voir figure 4.42).

Les figures 4.43,...,4.46 montrent qu'avec des bons coefficients au coin(cas du **COC**) l'erreur s'élimine du coin, même pour des angles limites : cas du $\theta = \pi$ (En pratique il suffit de prendre de angles proches de π) et on a convergence dans 10 itérations. Par contre en travaillant avec des **CICC**, l'erreur reste au coin(voir les figures 4.47,...,4.50).

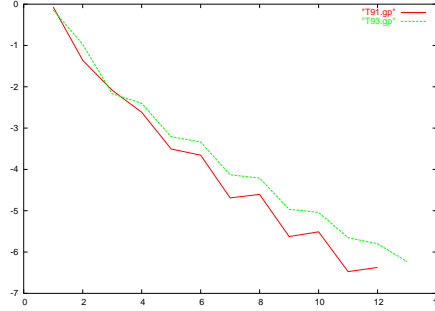


FIG. 4.41 – T91.gp : $\text{Log}_{10}(\text{erreur})$ en fonction des itérations avec **COC**,
T93.gp : $\text{Log}_{10}(\text{erreur})$ en fonction des itérations avec **CICC**, pour $\|\text{erreur}\|_{L^2(\Omega)} < 10^{-6}$, $\theta = \frac{9\pi}{10}$.

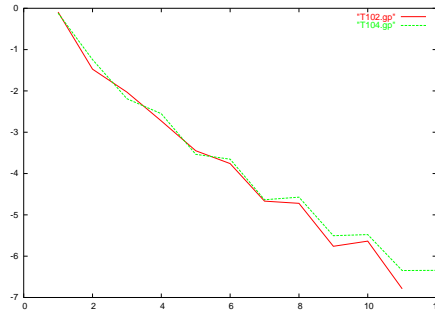


FIG. 4.42 – T02.gp : $\text{Log}_{10}(\text{erreur})$ en fonction des itérations avec **COC**,
T104.gp : $\text{Log}_{10}(\text{erreur})$ en fonction des itérations avec **CICC**, pour $\|\text{erreur}\|_{L^2(\Omega)} < 10^{-6}$, $\theta = \frac{49\pi}{50}$.

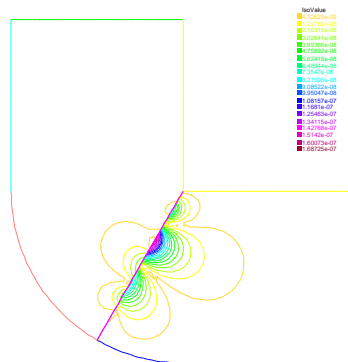


FIG. 4.43 – Les isovaleurs de l'erreur avec **COC** sont entre 4.32629×10^{-9} et 1.68725×10^{-7} pour une décomposition du domaine avec $\theta = \frac{2\pi}{3}$, à convergence (nombre d'itération=10).

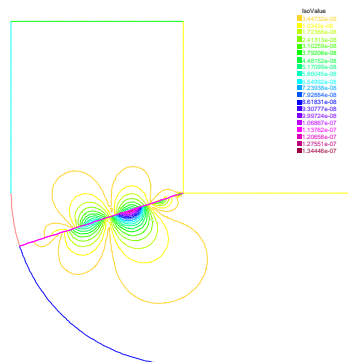


FIG. 4.44 – Les isovaleurs de l'erreur avec **COC**, sont entre 3.44732×10^{-9} et 1.34446×10^{-7} , pour une décomposition du domaine avec $\theta = \frac{9\pi}{10}$, à convergence (nombre d'itération=10).

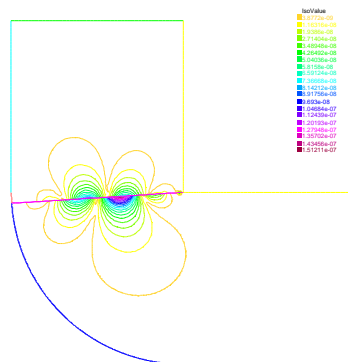


FIG. 4.45 – Les isovaleurs de l'erreur avec **COC** sont entre 3.8772×10^{-9} et 1.51211×10^{-7} pour une décomposition du domaine avec $\theta = \frac{49\pi}{50}$, à convergence (nombre d'itération=10).

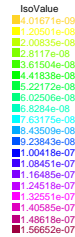


FIG. 4.46 – Les isovaleurs de l’erreur avec **COC** sont entre 4.016711×10^{-9} et 1.56652×10^{-7} pour des angles limite, $\theta = \pi$, à convergence (nombre d’itération=10).

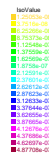


FIG. 4.47 – Les isovaleurs de l’erreur avec **CICC** sont entre 1.25053×10^{-8} et 4.87708×10^{-7} pour une décomposition du domaine avec $\theta = \frac{2\pi}{3}$, à convergence (nombre d’itération=13).

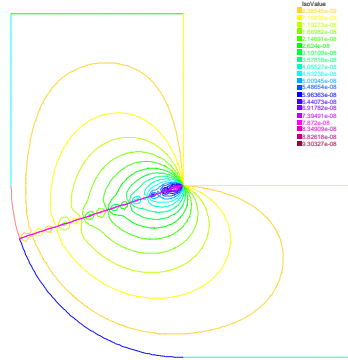


FIG. 4.48 – Les isovaleurs de l'erreur avec **CICC** sont entre 2.38545×10^{-9} et 9.30327×10^{-8} pour une décomposition du domaine avec $\theta = \frac{9\pi}{10}$, à convergence (nombre d'itération=13).

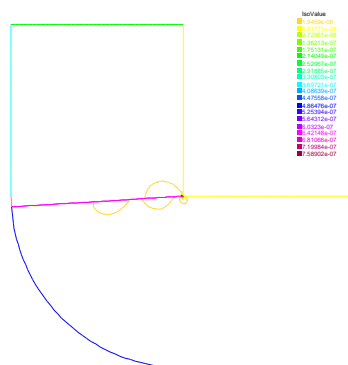


FIG. 4.49 – Les isovaleurs de l'erreur avec **CICC** sont entre 1.9459×10^{-8} et 7.58920×10^{-7} pour une décomposition du domaine avec $\theta = \frac{49\pi}{50}$, à convergence (nombre d'itération=12).

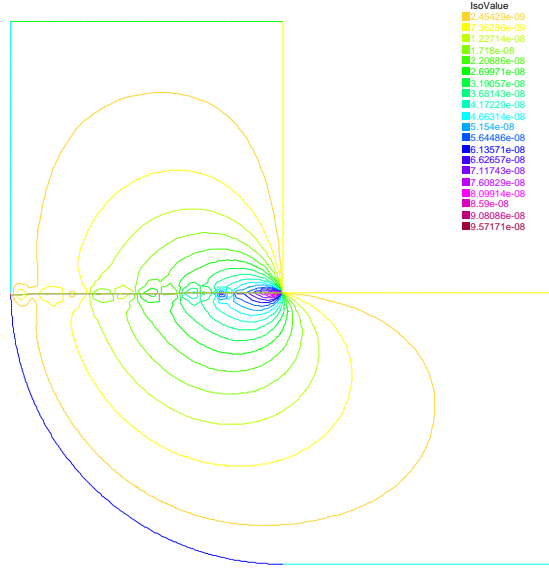


FIG. 4.50 – Les isovalues de l’erreur avec **CICC** sont entre 2.45429×10^{-9} et 9.57171×10^{-8} , pour une décomposition du domaine avec $\theta = \pi$ (angle limite), à convergence (nombre d’itération=13).

• Erreur en 3D

Pour ne pas alourdir la présentation en 3D, nous restreindrons à une décomposition de domaine en deux sous-domaines symétriques. Nous donnons ici trois types de résultats numériques pour une erreur qui vérifie le critère d’arrêt : $\|\text{erreur}\|_{L^2} < 10^{-6}$.

1. On traite en premier lieu le cas des **COC** dans les conditions d’interface,
2. choisir les **CICC** partout (les **COC** n’intervient plus au coin),
3. choisir une pente non optimale ($\neq \frac{2}{9}$), nous choisissons le cas d’une pente égale à deux.

On aboutit aux résultats :

- Les figures 4.51,...,4.54 montrent qu’avec les coefficients optimisés au coin (**COC**) l’erreur est faible au coin.
- Pour le choix des **CICC**, l’erreur présente des pics très marqués au coin, donc elle ne s’élimine pas du coin, voir les figures 4.55,...,4.58.
- Pour une pente égale à deux l’erreur est forte au coin, voir les figures 4.59,...,4.62, donc elle reste au coin pour une pente non optimale.

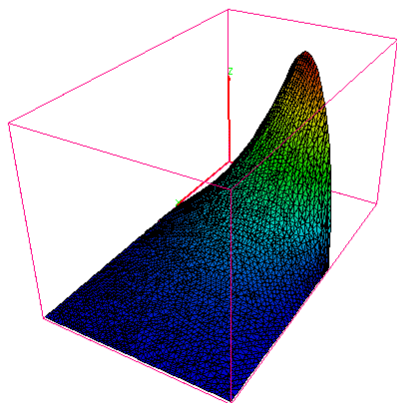
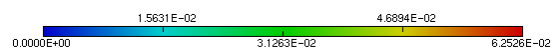


FIG. 4.51 – L'erreur avec **COC** à la première itération.

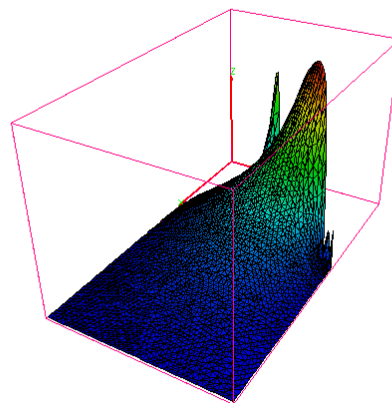
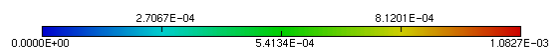


FIG. 4.52 – L'erreur avec **COC** à la 6^{ème} itération.

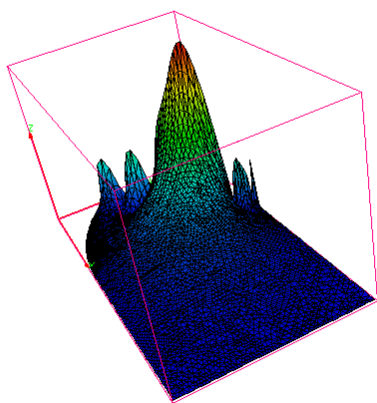
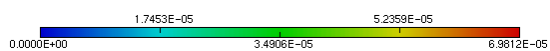


FIG. 4.53 – L'erreur avec **COC** à la 8^{ème} itération.

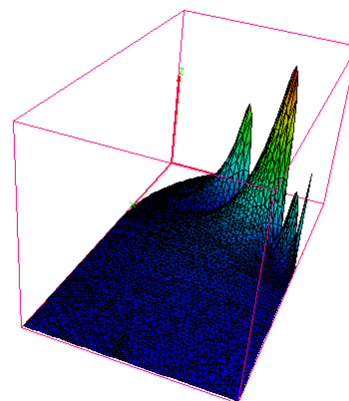
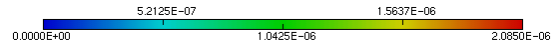
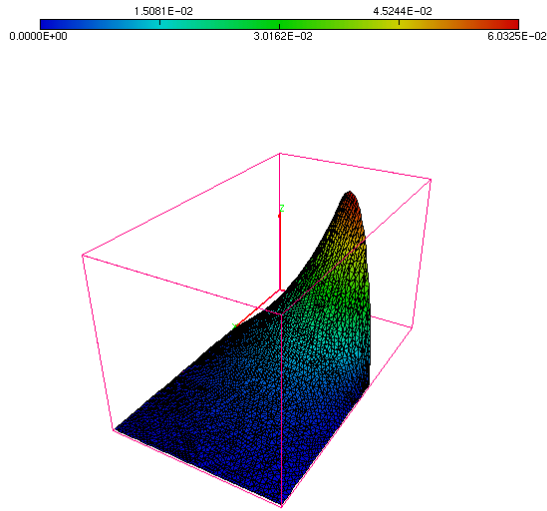
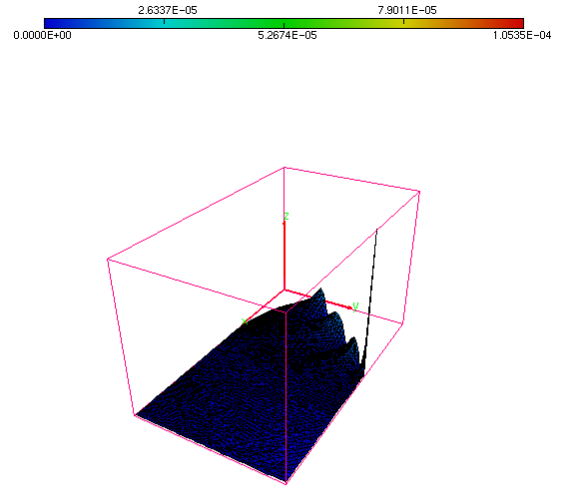
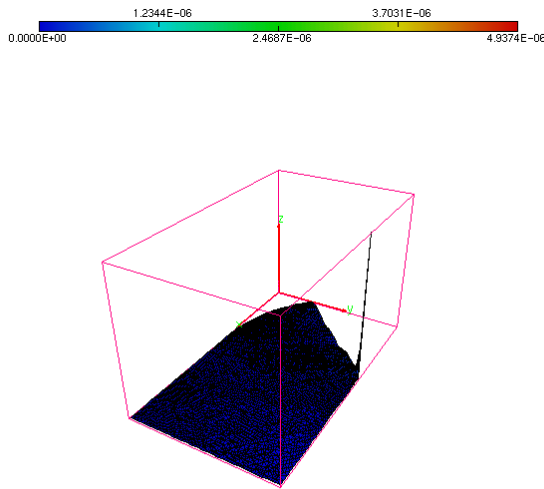
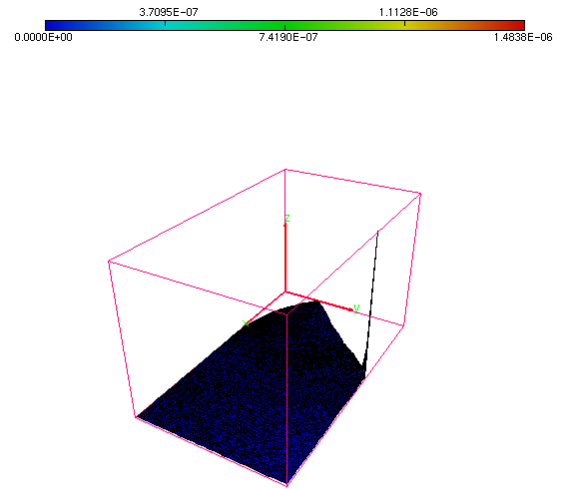


FIG. 4.54 – L'erreur avec **COC** à la dernière (10^{ème}) itération.

FIG. 4.55 – L'erreur avec **CICC** à la première itération.FIG. 4.56 – L'erreur avec **CICC** à la 6^{ème} itération.FIG. 4.57 – L'erreur avec **CICC** à la 10^{ème} itération.FIG. 4.58 – L'erreur avec **CICC** à la dernière itération (13^{ème})

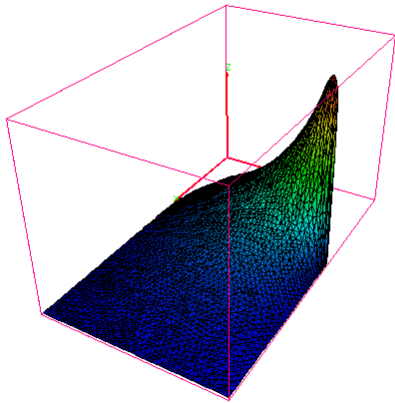
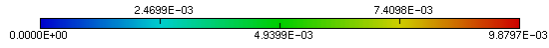


FIG. 4.59 – L'erreur avec une pente égale à 2 à la 9^{ème} itération.

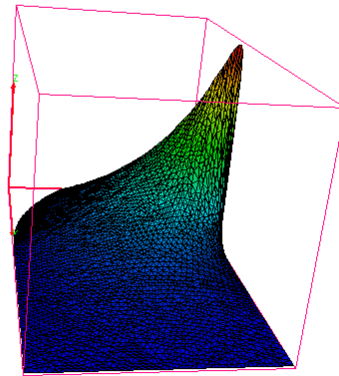
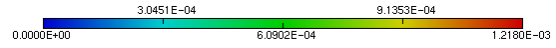


FIG. 4.60 – L'erreur avec une pente égale à 2 à la 17^{ème} itération.

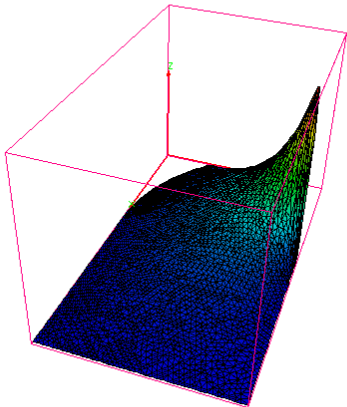
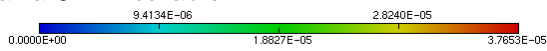


FIG. 4.61 – L'erreur avec une pente égale à 2 à la 31^{ème} itération.

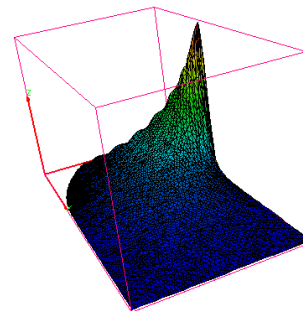
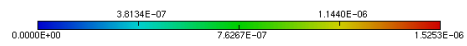


FIG. 4.62 – L'erreur avec une pente égale à 2 à la dernière itération.

4.10 Remarques importantes

1. Les figures des isovaleurs de l'erreur donnent les erreurs entre la solution du problème global discrétisé et la solution obtenue par la méthode de décomposition de domaine à convergence. Il est donc normal que les erreurs en valeur absolue soient comparables. Par contre, les courbes de convergence et les tableaux avec le nombre d'itérations à convergence montrent sans ambiguïté que les conditions optimisées au coin améliorent la vitesse de convergence de la méthode de décomposition de domaine.
2. Les expériences numériques avec des conditions d'interface bien adaptées au coin et à coefficients optimisés montrent que la différence entre l'itérée et la solution "exacte" (erreur) s'élimine du coin, et l'erreur est étalée vers le milieu de l'arête. En revanche si on choisit d'autres coefficients que les coefficients optimisés l'erreur présente des pics très marqués au niveau du coin.

Chapitre 5

Décomposition de domaine avec coin intérieur

5.1 Introduction

La résolution des problèmes elliptiques avec les méthodes de décomposition de domaine, fait apparaître des interfaces avec singularités géométriques. Contrairement au chapitre précédent(chapitre 4) dans lequel on a traité un problème elliptique dans un domaine global non convexe, et par suite la solution dans le domaine complet est singulière, on traite dans ce chapitre le même problème elliptique que le chapitre précédent mais on travaille dans un domaine global Ω qui est régulier et donc la solution du problème

$$\begin{cases} (\eta - \Delta)u = f & \text{dans } \Omega \\ +C.L. & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

est plus régulière à priori que la solution dans chaque sous-domaine.

En pratique, on traite par exemple le cas où le domaine global est un disque de \mathbb{R}^2 , et on effectue une décomposition du disque en deux sous-domaines sous forme secteur de \mathbb{R}^2 (voir la figure 5.1).

L'incidence des interfaces des deux sous domaines, crée deux types de coins, des coins qui sont sur le bord du domaine global, problème qu'on sait déjà résoudre et des coins à l'intérieur du domaine global. On s'intéresse dans ce chapitre aux coins intérieur au domine global.

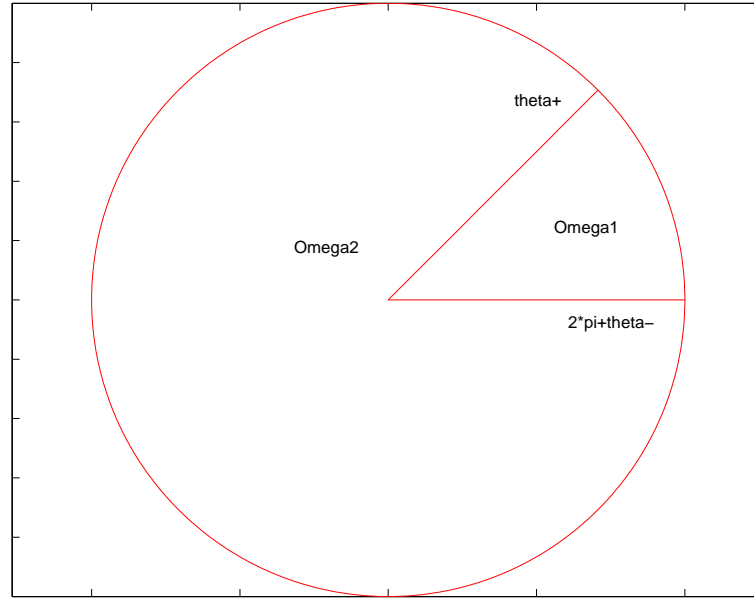
On a déjà dit que dans le cas où le coin du sous-domaine est à l'intérieur du domaine global, les conditions d'interface ne doivent pas contenir un terme constant ce qui exige de choisir $\beta = 0$ dans les conditions aux limites pour ne pas forcer la valeur de la solution au coin à être nulle.

On travaille le long de ce chapitre avec des conditions d'interface de type

$$\frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\alpha}{2} r \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

où α est un paramètre positif.

Le problème consiste à choisir α de façon convenable pour avoir une régularité optimale de notre problème, on distinguera dans notre étude le cas des secteurs convexes et

FIG. 5.1 – Décomposition d'un disque de \mathbb{R}^2 en deux sous-domaines

des secteurs non convexes et on montrera qu'on peut optimiser le paramètre α dans un secteur convexe. En revanche pour un secteur non convexe on ne peut plus éliminer le premier pôle pour le choix de α .

Dans le cas d'une décomposition du domaine en deux sous-domaines : cas d'un disque coupé en deux secteurs (voir la figure 5.1), on a toujours la présence d'un sous-domaine non convexe, le mieux que l'on puisse faire dans le sous-domaine non convexe est de pousser le premier pôle le plus loin possible, ou il faut opter pour une décomposition en sous-domaines convexes, cas d'un disque coupé en trois secteurs convexes.

5.2 Calcul des pôles avec condition d'ordre 2 pour un sous-domaine

Soit Ω un secteur du plan, $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times]\theta_-, \theta_+[$.

On travaille dans cette section avec un seul paramètre α dans les conditions aux limites sur les bords $\{\theta = \theta_\pm\}$. On se propose de montrer qu'il existe un unique paramètre α qui élimine le premier pôle de la résolvante dans le cas d'un secteur convexe. En revanche pour un secteur non convexe on n'arrive pas à éliminer le premier pôle avec le même paramètre α qui intervient dans les deux conditions d'interface en θ_+ et en θ_- .

On cherche à résoudre dans Ω le problème défini par :

$$(S) \begin{cases} \left(\eta - \frac{1}{r^2} ((r\partial_r)^2 + \partial_\theta^2) \right) u(r, \theta) = f \\ \left(\partial_\theta + \frac{\alpha}{2} (r\partial_r)^2 \right) u(r, \theta_-) = \left(\partial_\theta + \frac{\alpha}{2} (r\partial_r)^2 \right) u_-(r, \theta_- + 2\pi) \\ \left(\partial_\theta - \frac{\alpha}{2} (r\partial_r)^2 \right) u(r, \theta_+) = \left(\partial_\theta - \frac{\alpha}{2} (r\partial_r)^2 \right) u_-(r, \theta_+) \end{cases}$$

où η est un réel positif, u_- est une restriction de u dans le domaine voisin.

Soit v la solution de :

$$(\eta - \Delta)(v) = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^2$$

On pose $e = u - v$, $e_- = u_- - v_-$.

Comme on s'intéresse à ce qui se passe au voisinage de l'origine, on néglige les termes d'ordre zéro en r , ainsi e est solution du problème :

$$\begin{cases} \left(\partial_\theta^2 + (r\partial_r)^2 \right) e(r, \theta) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \left(\partial_\theta + \frac{\alpha}{2} (r\partial_r)^2 \right) e(r, \theta_-) = g_-(r) \\ \left(\partial_\theta - \frac{\alpha}{2} (r\partial_r)^2 \right) e(r, \theta_+) = g_+(r) \end{cases} \quad (5.1)$$

Avec g_+ et g_- sont données par les formules

$$g_+(r) = \left(\partial_\theta - \frac{\alpha}{2} (r\partial_r)^2 \right) e_-(r, \theta_+)$$

$$g_-(r) = \left(\partial_\theta + \frac{\alpha}{2} (r\partial_r)^2 \right) e_-(r, \theta_- + 2\pi)$$

On rappelle que

$$M((r\partial_r)^n f)(z) = \left(\frac{z}{i} \right)^n M(f)(z).$$

Ainsi le système (5.1) devient après Mellin

$$\begin{cases} (\partial_\theta^2 - z^2) \hat{e}(z, \theta) = 0 \\ (\partial_\theta - \frac{\alpha}{2} z^2) \hat{e}(z, \theta_-) = \hat{g}_-(z) \\ (\partial_\theta + \frac{\alpha}{2} z^2) \hat{e}(z, \theta_+) = \hat{g}_+(z) \end{cases} \quad (5.2)$$

On a

$$(5.2) \iff P(z) \hat{e} = F$$

où

$$F = \left[0, \hat{g}_+(z), \hat{g}_-(z) \right]^T$$

et

$$P(z) = \left[(\partial_\theta^2 - z^2); \gamma_{|\theta_+} (\partial_\theta + \frac{\alpha}{2} z^2); \gamma_{|\theta_-} (\partial_\theta - \frac{\alpha}{2} z^2) \right]^T$$

où γ représente l'opérateur de trace et T indique le transposé.

Là où il existe, l'inverse de $P(z)$ sera noté $R(z)$, d'après la théorie de Fredholm analytique (Reed and Simon tome 4), $R(z)$ est une fonction méromorphe dont les pôles sont

les points où $P(z)$ n'est pas injective.

On se propose dans cette partie d'établir l'expression de \hat{e} en fonction des données \hat{g}_+ et \hat{g}_- .

L'équation $(\partial_\theta^2 - z^2)\hat{e}(z, \theta) = 0$, est une équation différentielle ordinaire dont on peut chercher les solutions sous la forme

$$\hat{e}(z, \theta) = a(z)e^{z(\theta-\theta_-)} + b(z)e^{-z(\theta-\theta_+)}$$

où $a(z)$ et $b(z)$ sont deux fonctions qui dépendent de z .

À partir des deux conditions d'interface on peut déterminer un système vérifié par $a(z)$ et $b(z)$.

En θ_+ :

$$(\partial_\theta + \frac{\alpha}{2}z^2)\hat{e}(z, \theta)|_{\theta=\theta_+} = \hat{g}_+(z) \iff (z + \frac{\alpha}{2}z^2)e^{z(\theta_+-\theta_-)}a(z) + (-z + \frac{\alpha}{2}z^2)b(z) = \hat{g}_+(z)$$

En θ_- :

$$(\partial_\theta - \frac{\alpha}{2}z^2)\hat{e}(z, \theta)|_{\theta=\theta_-} = \hat{g}_-(z) \iff (z - \frac{\alpha}{2}z^2)a(z) - (z + \frac{\alpha}{2}z^2)e^{z(\theta_+-\theta_-)}b(z) = \hat{g}_-(z)$$

Donc $a(z)$ et $b(z)$ sont solutions de

$$\begin{cases} (1 + \frac{\alpha}{2}z)e^{z(\theta_+-\theta_-)}a(z) + (-1 + \frac{\alpha}{2}z)b(z) = \frac{\hat{g}_+(z)}{z} \\ (1 - \frac{\alpha}{2}z)a(z) - (1 + \frac{\alpha}{2}z)e^{z(\theta_+-\theta_-)}b(z) = \frac{\hat{g}_-(z)}{z} \end{cases}$$

On pose

$$B(z) = \begin{pmatrix} (1 + \frac{\alpha}{2}z)e^{z(\theta_+-\theta_-)} & -1 + \frac{\alpha}{2}z \\ 1 - \frac{\alpha}{2}z & -(1 + \frac{\alpha}{2}z)e^{z(\theta_+-\theta_-)} \end{pmatrix}$$

la solution \hat{e} est donnée par

$$\begin{pmatrix} a(z) \\ b(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{z}B^{-1}(z)\begin{pmatrix} \hat{g}_+(z) \\ \hat{g}_-(z) \end{pmatrix}$$

On pose $\Delta(z) = \det B(z)$, un simple calcul de déterminant donne

$$\Delta(z) = -(1 + \frac{\alpha}{2}z)^2 e^{2z(\theta_+-\theta_-)} + (1 - \frac{\alpha}{2}z)^2.$$

Pour déterminer les pôles il suffit de résoudre l'équation $\Delta(z) = 0$.

Donc les pôles sont solutions de l'équation

$$e^{2z(\theta_+-\theta_+)} = \frac{(1 - \frac{\alpha}{2}z)^2}{(1 + \frac{\alpha}{2}z)^2}.$$

Proposition 18 Les pôles à partie imaginaire positive de B^{-1} vérifient

$$z = it \text{ et } e^{2it(\theta_+ - \theta_-)} = \left(\frac{1 - i\frac{\alpha}{2}t}{1 + i\frac{\alpha}{2}t} \right)^2. \quad (5.3)$$

Preuve 27 On sait que les pôles sont solutions de

$$e^{2z(\theta_+ - \theta_-)} = \left(\frac{1 - \frac{\alpha}{2}z}{1 + \frac{\alpha}{2}z} \right)^2. \quad (5.4)$$

Remplaçons z par $r + it$ dans (5.4) et par passage au module on obtient

$$e^{2r(\theta_+ - \theta_-)} = \frac{(1 - \frac{\alpha}{2}r)^2 + (\frac{\alpha}{2})^2 t^2}{(1 + \frac{\alpha}{2}r)^2 + (\frac{\alpha}{2})^2 t^2},$$

pour simplifier les calculs on pose

$$\theta_1(r) = \frac{(1 - \frac{\alpha}{2}r)^2 + (\frac{\alpha}{2})^2 t^2}{(1 + \frac{\alpha}{2}r)^2 + (\frac{\alpha}{2})^2 t^2}.$$

On remarque que pour $r > 0$, on a

$$\theta_1(r) < 1 \text{ et } e^{2r(\theta_+ - \theta_-)} > 1$$

donc on ne peut pas avoir $r > 0$.

Le même raisonnement donne que r ne peut pas être négatif. Donc forcément $r = 0$.

Ainsi les pôles sont de la forme $z = it, t > 0$, et vérifient l'équation

$$e^{2it(\theta_+ - \theta_-)} = \left(\frac{1 - i\frac{\alpha}{2}t}{1 + i\frac{\alpha}{2}t} \right)^2.$$

Remarque 16 1. Comme $u \in H^1$, cela entraîne que l'on a à considérer les pôles dont la partie imaginaire est strictement positive.

2. $\hat{u}(z)$ a un pôle simple en zéro dont le résidu dépend de $u(0)$, cela est une quantité globale.

Exemple : Si on étudie dans un disque noté \mathcal{D} le système suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u &= 0 \text{ dans } \mathcal{D} \\ u_{\partial\mathcal{D}} &= g \end{cases}$$

Alors $u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} g(\theta) d\theta$, est donnée par la valeur de u sur le bord du disque. Si on sait bien résoudre en dehors de $x = 0$, la valeur en zéro va être donnée par le couplage entre $|x| \leq \epsilon$ et $|x| \geq \epsilon$.

5.3 Etude de l'équation (5.3)

On sait que les pôles à partie imaginaire strictement positive sont solutions de

$$e^{2it(\theta_+ - \theta_-)} = \left(\frac{1 - i\frac{\alpha}{2}t}{1 + i\frac{\alpha}{2}t} \right)^2.$$

On pose $\lambda(z) = \frac{1 - \frac{\alpha}{2}z}{1 + \frac{\alpha}{2}z} e^{-z(\theta_+ - \theta_-)}$.

Donc $z = it$ est un pôle si et seulement si $\lambda(it) = \pm 1$, ainsi on ne regarde dans la suite que les deux équations $\lambda(it) = +1$ et $\lambda(it) = -1, t > 0$.

5.3.1 Détermination de l'équation des pôles

1. Cas où $\lambda(it) = 1$

l'équation $\lambda(it) = 1$ est équivalente à $e^{it(\theta_+ - \theta_-)} = \frac{1 - i\frac{\alpha}{2}t}{1 + i\frac{\alpha}{2}t}$.

On pose dans toute la suite $x = \frac{\theta_+ - \theta_-}{\pi}$.

En écrivant

$$1 - i\frac{\alpha}{2}t = \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{2}t\right)^2} e^{i\tau},$$

où τ est donné par

$$\tau = \arctan\left(-\frac{\alpha t}{2}\right) \bmod(\pi),$$

donc t est solution de

$$e^{i\pi x t} = e^{2i\tau}.$$

Par égalité des arguments des deux nombres complexes on déduit que :

$$t\pi x = (2\tau) \bmod(2\pi),$$

d'où

$$\tan\left(\frac{t\pi x}{2}\right) = -\frac{\alpha t}{2}.$$

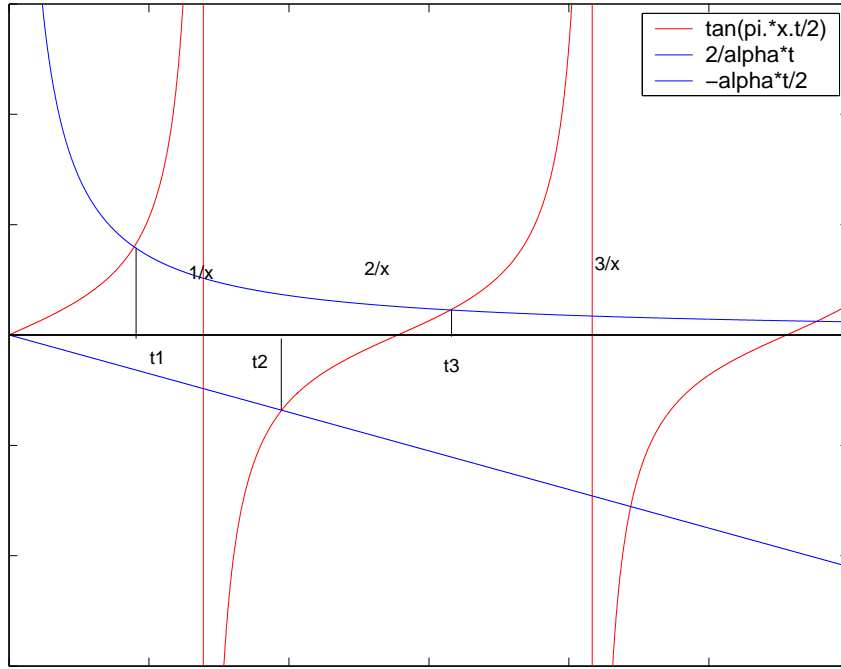
Donc on aboutit à la première équation des pôles donnée par

$$\tan\left(\frac{t\pi x}{2}\right) = -\frac{\alpha t}{2}.$$

2. Cas où $\lambda(it) = -1$

Avec les mêmes techniques de calculs on obtient la deuxième équation des pôles, donnée par la formule

$$\tan\left(\frac{t\pi x}{2}\right) = \frac{2}{\alpha t}.$$

FIG. 5.2 – Cas où $\alpha > 0$

Remarque 17 D'après l'étude graphique des équations des pôles, (voir la figure 5.2) on peut déduire

1. Dans l'intervalle $]0, \frac{2}{x}[$ on a toujours un pôle avec $\lambda(it) = 1$ et un pôle avec $\lambda(it) = -1$.
2. Pour $\alpha > 0$, le premier pôle est associé à $\lambda(it) = -1$, il est dans l'intervalle $]0, \frac{1}{x}[$ et le second pôle est associé à $\lambda(it) = 1$, et il appartient à l'intervalle $]\frac{1}{x}, \frac{2}{x}[$.
3. Pour $\alpha = 0$, les pôles sont solutions de $\lambda(it) = \pm 1$

$$\begin{aligned} \lambda(it) = +1 &\iff e^{it(\theta_+ - \theta_-)} = 1 \\ &\iff t\pi x = 0 \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

Comme on s'intéresse aux pôles à partie imaginaire strictement positive donc $t = \frac{2k}{x}, k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \lambda(it) = -1 &\iff e^{it(\theta_+ - \theta_-)} = -1 \\ &\iff t\pi x = \pi \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

Comme on s'intéresse aux pôles à partie imaginaire strictement positive donc $t = \frac{2k+1}{x}, k \in \mathbb{N}$.

5.4 Etude avec des données bien choisies

On se propose dans cette partie de déterminer α pour annuler le premier pôle pour des données bien choisies.

On pose

$$\begin{aligned} g_+(r, \theta_+) &= \left(\partial_\theta - \frac{\alpha}{2}(r\partial_r)^2 \right) e_-(r, \theta_+) \\ g_-(r, \theta_-) &= \left(\partial_\theta + \frac{\alpha}{2}(r\partial_r)^2 \right) e_-(r, \theta_- + 2\pi) \end{aligned}$$

avec e_- ayant une bonne régularité (par exemple H^2, C^∞).

L'idée est que si g_+ et g_- sont associées à une solution régulière à l'extérieur de Ω alors la solution doit avoir une bonne régularité.

Comme on travaille au voisinage du coin, on considère seulement les premiers termes du développement de Taylor de e_- en négligeant les termes d'ordre supérieur et on veut que le choix de α fasse disparaître le premier pôle en it_1 de e .

5.4.1 Cas des données régulières

On sait que le premier pôle est dans $]0, \frac{1}{x}[$ est associé à $\lambda(it_1) = -1$, le deuxième pôle est dans $] \frac{1}{x}, \frac{2}{x}[$ et est associé à $\lambda(it_1) = 1$. Dans tous les cas on ne pourra pas faire disparaître les deux pôles, mais on peut essayer de faire disparaître le premier et voir où se positionne le second.

Les conditions aux limites ne contiennent pas de terme d'ordre zéro donc g_+ et g_- ne dépendent plus de la valeur en zéro de e_- , on prendra ainsi une donnée linéaire

$$e_-(x, y) = b_1x + b_2y.$$

Par passage aux coordonnées polaires ($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$) on obtient

$$e_-(r, \theta) = b_1r \cos(\theta) + b_2r \sin(\theta).$$

Comme nous travaillons au voisinage du coin, il suffit de considérer g_+ et g_- de la forme

$$\begin{aligned} g_+(r, \theta_+) &= 1_{\{r \leq R\}} \left(\partial_\theta - \frac{\alpha}{2}(r\partial_r)^2 \right) e_-(r, \theta_+); \\ g_-(r, \theta_-) &= 1_{\{r \leq R\}} \left(\partial_\theta + \frac{\alpha}{2}(r\partial_r)^2 \right) e_-(r, \theta_- + 2\pi); \end{aligned}$$

où R est un réel strictement positif.

Alors $g_+(r)$ et $g_-(r)$ sont données par

$$\begin{aligned} g_+(r) &= r 1_{\{r \leq R\}} \left[b_1(-\sin \theta_+ - \frac{\alpha}{2} \cos \theta_+) + b_2(\cos \theta_+ - \frac{\alpha}{2} \sin \theta_+) \right]; \\ g_-(r) &= r 1_{\{r \leq R\}} \left[b_1(-\sin \theta_- + \frac{\alpha}{2} \cos \theta_-) + b_2(\cos \theta_- + \frac{\alpha}{2} \sin \theta_-) \right]. \end{aligned}$$

Les transformées de Mellin de g_+ , g_- sont données par

$$\begin{aligned}\hat{g}_+(z) &= \frac{R^{1+iz}}{1+iz} \left[b_1(-\sin \theta_+ - \frac{\alpha}{2} \cos \theta_+) + b_2(\cos \theta_+ - \frac{\alpha}{2} \sin \theta_+) \right]; \\ \hat{g}_-(z) &= \frac{R^{1+iz}}{1+iz} \left[b_1(-\sin \theta_- + \frac{\alpha}{2} \cos \theta_-) + b_2(\cos \theta_- + \frac{\alpha}{2} \sin \theta_-) \right].\end{aligned}$$

Dans la partie suivante on se propose de déterminer α pour que

$$B^{-1}(z) \begin{pmatrix} \hat{g}_+(z) \\ \hat{g}_-(z) \end{pmatrix} \text{ n'ait plus de p\^ole en } it_1, (t_1 > 0).$$

Cela revient à dire

$$\Delta(it_1)B^{-1}(it_1) \begin{pmatrix} \hat{g}_+(it_1) \\ \hat{g}_-(it_1) \end{pmatrix} = 0.$$

Donc

$$\begin{pmatrix} -(1 + i\frac{\alpha}{2}t_1)e^{it_1(\theta_+ - \theta_-)} & 1 - i\frac{\alpha}{2}t_1 \\ -1 + i\frac{\alpha}{2}t_1 & (1 + i\frac{\alpha}{2}t_1)e^{it_1(\theta_+ - \theta_-)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{g}_+(it_1) \\ \hat{g}_-(it_1) \end{pmatrix} = 0. \quad (5.5)$$

Comme $\det(\Delta(it_1)B^{-1}(it_1)) = \Delta(it_1) = 0$, donc il suffit de prendre une seule équation de (5.5)

$$\hat{g}_+(it_1) = \frac{(1 - i\frac{\alpha}{2}t_1)}{(1 + i\frac{\alpha}{2}t_1)} e^{-it_1(\theta_+ - \theta_-)} \hat{g}_-(it_1) \quad (5.6)$$

or on sait que

$$\frac{(1 - i\frac{\alpha}{2}t_1)}{(1 + i\frac{\alpha}{2}t_1)} e^{-it_1(\theta_+ - \theta_-)} = \lambda(it_1) = \pm 1,$$

donc l'équation (5.6) s'écrit en fonction de $\lambda(it_1)$, et elle est donnée par

$$\hat{g}_+(it_1) = \lambda(it_1)\hat{g}_-(it_1).$$

On note que la relation $\hat{g}_+(it_1) = \lambda(it_1)\hat{g}_-(it_1)$ ne dépend pas du choix de la troncature R .

Proposition 19 Dans un secteur convexe, pour éliminer le premier p\^ole il suffit de choisir

$$\alpha = \frac{2}{\tan(\frac{\pi}{2}x)} \quad \text{si } x \in]0, 1[.$$

Preuve 28 On sait que le premier pôle est associé à $\lambda(it_1) = -1$, de plus $t_1 \in]0, \frac{1}{x}[$ la relation $\hat{g}_+(it_1) = -\hat{g}_-(it_1)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} & b_1\left(-\sin \theta_+ - \frac{\alpha}{2} \cos \theta_+\right) + b_2\left(\cos \theta_+ - \frac{\alpha}{2} \sin \theta_+\right) \\ & \quad = \\ & - \left[b_1\left(-\sin \theta_- + \frac{\alpha}{2} \cos \theta_-\right) + b_2\left(\cos \theta_- + \frac{\alpha}{2} \sin \theta_-\right) \right] \end{aligned}$$

Donc quelque soit (b_1, b_2) on a :

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2}(\cos \theta_- - \cos \theta_+) = \sin \theta_+ + \sin \theta_- \\ \frac{\alpha}{2}(\sin \theta_+ - \sin \theta_-) = \cos \theta_+ + \cos \theta_- \end{cases}$$

On remarque que les deux équations du système précédent sont liées, donc il suffit de considérer une seule équation. En choisissant une seule équation, on obtient l'expression de α

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \theta_+ + \sin \theta_-}{\cos \theta_- - \cos \theta_+},$$

d'où

$$\alpha = \frac{2}{\tan\left(\frac{\theta_+ - \theta_-}{2}\right)}.$$

Comme $x = \frac{\theta_+ - \theta_-}{\pi}$, donc on peut exprimer α en fonction de x

$$\alpha = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

On remarque que $\alpha > 0$ n'est possible que pour $x < 1$ i.e $\theta_+ - \theta_- < \pi$.

Donc, dans un secteur convexe on peut trouver un paramètre α positif qui élimine le premier pôle it_1 associé à $\lambda(it) = -1$.

Remarque 18 1. Si on travaille avec un seul paramètre α et pour des données régulières on ne peut pas avoir α positif pour éliminer le premier pôle dans un secteur non convexe.

2. Par passage à la décomposition du domaine, par exemple on découpe un disque en deux et on regarde le problème avec les deux sous-domaines.

On peut supposer que Ω_1 est convexe, alors dans Ω_1 on peut obtenir une régularité H^2 et même mieux pour des données régulières, en revanche dans Ω_2 le mieux que l'on puisse obtenir est $H^{1+\frac{1}{x}-\delta}$, où δ un réel positif très petit (par exemple choisir $\alpha = 0$). En pratique il suffit de prendre α petit.

5.4.2 Cas des données associées au problème de Neumann

Si on regarde le problème avec les deux sous-domaines, on a toujours un domaine convexe et un domaine non convexe, on peut supposer par exemple que Ω_1 est convexe, (voir figure 5.1).

On sait que dans le domaine convexe on peut éliminer le premier pôle, et on peut obtenir une régularité H^2 et même mieux pour des données régulières. Par contre dans Ω_2 (sous-domaine non convexe) le mieux que l'on puisse obtenir pour des données régulières est $H^{1+\frac{1}{x}-\delta}$, où δ est réel positif petit, en prenant $\alpha = 0$, avec un pôle en $\frac{i}{x}$. En conséquence, les données e_- régulières sont au mieux $H^{1+\frac{1}{x}-\delta}$ dans le complémentaire de Ω_1 avec une singularité associée au pôle $\frac{i}{x}$. Ainsi au lieu de travailler avec un développement de Taylor usuel de e_- , il vaut mieux considérer

$$e_-(r, \theta) = br^{\frac{1}{x}} \phi_x(\theta)$$

où $r^{\frac{1}{x}} \phi_x(\theta)$ est le type asymptotique associé au problème de Neumann dans Ω_2 ,

$$\begin{cases} (\partial_\theta^2 - z^2) \phi = 0 \\ \partial_\theta \phi|_{\theta_+} = 0 \\ \partial_\theta \phi|_{\theta_- + 2\pi} = 0 \end{cases}$$

On prend $z = \frac{i}{x_+}$, où $x_+ = \frac{\theta_- + 2\pi - \theta_+}{\pi}$, donc ϕ vérifie

$$\begin{cases} (\partial_\theta^2 + \frac{1}{x_+^2}) \phi = 0 \\ \partial_\theta \phi|_{\theta_+} = 0 \\ \partial_\theta \phi|_{\theta_- + 2\pi} = 0 \end{cases}$$

On en déduit par un simple calcul que

$$\phi = \cos \left(\frac{\pi(\theta - \theta_+)}{\theta_- + 2\pi - \theta_+} \right).$$

Donc, on travaille dans la suite avec une donnée

$$e_-(r, \theta) = br^{\frac{1}{x_+}} \cos \left(\frac{\theta - \theta_+}{x_+} \right), \quad (5.7)$$

et on veut que le premier pôle associé au problème dans Ω_1 soit éliminé pour tout $b \in \mathbb{R}$.

On sait que le premier pôle dans $]0, \frac{1}{x}[$ apparaît pour $\lambda(it_1) = -1$, on doit choisir $\alpha > 0$ dans Ω_1 de telle sorte que $\hat{g}_+(it_1) = -\hat{g}_-(it_1)$.

On rappelle que

$$g_+(r) = 1_{\{r \leq R\}} \left(\partial_\theta - \frac{\alpha}{2} (r \partial_r)^2 \right) e_-(r, \theta_+),$$

$$g_-(r) = 1_{\{r \leq R\}} \left(\partial_\theta + \frac{\alpha}{2} (r \partial_r)^2 \right) e_-(r, \theta_- + 2\pi).$$

Un simple calcul utilise les définitions de g_+ , g_- et la relation (5.7) donne

$$g_+(r) = -1_{\{r \leq R\}} b \frac{r^{\frac{1}{x_+}}}{x_+^2},$$

et

$$g_-(r) = -1_{\{r \leq R\}} b \frac{r^{\frac{1}{x_+}}}{x_+^2}.$$

On constate que $g_+(r) = g_-(r)$, donc il est impossible d'avoir $\hat{g}_+(it_1) = -\hat{g}_-(it_1)$ avec une donnée de la forme

$$e_-(r, \theta) = br^{\frac{1}{x_+}} \cos\left(\frac{\theta - \theta_+}{x_+}\right).$$

Le premier pôle it_1 apparaît pour la donnée singulière issue de Ω_2 .

Regardons à quel niveau est cette singularité associée à Ω_1 pour le α bien calculé pour des données régulières.

On sait que t_1 est solution de

$$\frac{2}{\alpha t} = \tan\left(\frac{\pi x t}{2}\right), t \in]0, \frac{1}{x}[, x < 1$$

où

$$\alpha = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

donc t_1 est solution de

$$\frac{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{t} = \tan\left(\frac{\pi x t}{2}\right). \quad (5.8)$$

Comme $t_1 \in]0, \frac{1}{x}[, x < 1$ donc forcément $t_1(\alpha) = 1$ est l'unique solution de l'équation (5.8).

Même si ce pôle ($t_1 = 1$) s'élimine au cours des itérations, il correspond à des singularités moins fortes que celles apparaissant dans $\Omega_2(1 > \frac{1}{x_+})$. En outre, il correspond dans Ω_1 à la régularité H^{2-0} et enfin après un certain nombre d'itérations on est proche des données régulières et pour des données régulières et dans le cas d'un domaine convexe ce pôle s'élimine pour le bon choix de α , i.e choisir

$$\alpha = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

5.5 Cas à deux paramètres : α_+ en θ_+ et α_- en θ_-

On sait jusqu'à maintenant que pour les secteurs convexes on peut optimiser le coefficient α mais ce n'est pas le cas pour un secteur non convexe. Donc on se propose dans cette partie de voir si c'est possible d'optimiser dans le cas d'un secteur non convexe

quand on possède deux paramètres. Alors on va essayer de répondre à la question suivante :

Peut-on optimiser α_{\pm} dans un secteur non convexe ?

Pour répondre à cette question, on calcule les pôles puis voir la possibilité de choisir α_{\pm} pour éliminer le premier pôle dans le cas d'un secteur non convexe.

5.5.1 Calcul des pôles

On possède dans cette partie deux opérateurs d'interface qui dépendent des deux paramètres α_+ en θ_+ et α_- en θ_- . On proposera dans la suite une analyse de la résolvante de notre problème pour déterminer les pôles et on discutera la position des pôles relativement à zéro pour des données bien choisies.

Soit $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times]\theta_-, \theta_+[$ un secteur angulaire du plan.

Le système à résoudre est

$$\begin{cases} \left(\partial_\theta^2 + (r\partial_r)^2 \right) e(r, \theta) = 0 \\ \left(\partial_\theta + \frac{\alpha_-}{2} (r\partial_r)^2 \right) e(r, \theta_-) = g_-(r) \\ \left(\partial_\theta - \frac{\alpha_+}{2} (r\partial_r)^2 \right) e(r, \theta_+) = g_+(r) \end{cases}$$

avec

$$g_+(r) = \left(\partial_\theta - \frac{\alpha_+}{2} (r\partial_r)^2 \right) e_-(r, \theta_+),$$

et

$$g_-(r) = \left(\partial_\theta + \frac{\alpha_-}{2} (r\partial_r)^2 \right) e_-(r, \theta_-).$$

Par passage en Mellin, on en déduit que

$$\begin{cases} \left(\partial_\theta^2 - z^2 \right) \hat{e}(z, \theta) = 0 \\ \left(\partial_\theta - \frac{\alpha_-}{2} z^2 \right) \hat{e}(z, \theta_-) = \hat{g}_-(z) \\ \left(\partial_\theta + \frac{\alpha_+}{2} z^2 \right) \hat{e}(z, \theta_+) = \hat{g}_+(z) \end{cases}$$

Nous avons vu que les solutions de l'équation $(\partial_\theta^2 - z^2)\hat{e}(z, \theta) = 0$ sont cherchées sous la forme

$$\hat{e}(z, \theta) = a(z)e^{z(\theta-\theta_-)} + b(z)e^{-z(\theta-\theta_+)}$$

où $a(z)$ et $b(z)$ sont deux fonctions qui dépendent de z .

Les conditions aux limites sur les bords $\{\theta = \theta_{\pm}\}$ donnent

En θ_+ :

$$\left(\partial_\theta + \frac{\alpha_+}{2} z^2 \right) \hat{e}(z, \theta)|_{\theta=\theta_+} = \hat{g}_+(z) \iff \left(z + \frac{\alpha_+}{2} z^2 \right) e^{z(\theta_+-\theta_-)} a(z) + \left(-z + \frac{\alpha_+}{2} z^2 \right) b(z) = \hat{g}_+(z),$$

En θ_- :

$$\left(\partial_\theta - \frac{\alpha_-}{2} z^2 \right) \hat{e}(z, \theta)|_{\theta=\theta_-} = \hat{g}_-(z) \iff \left(z - \frac{\alpha_-}{2} z^2 \right) a(z) - \left(z + \frac{\alpha_-}{2} z^2 \right) e^{z(\theta_+-\theta_-)} b(z) = \hat{g}_-(z).$$

Donc $a(z)$ et $b(z)$ sont solutions de

$$\begin{cases} (1 + \frac{\alpha_+}{2}z)e^{z(\theta_+ - \theta_-)}a(z) + (-1 + \frac{\alpha_+}{2}z)b(z) = \frac{\hat{g}_+(z)}{z} \\ (1 - \frac{\alpha_-}{2}z)a(z) - (1 + \frac{\alpha_-}{2}z)e^{z(\theta_+ - \theta_-)}b(z) = \frac{\hat{g}_-(z)}{z} \end{cases}$$

On pose

$$B(z) = \begin{pmatrix} (1 + \frac{\alpha_+}{2}z)e^{z(\theta_+ - \theta_-)} & -1 + \frac{\alpha_+}{2}z \\ 1 - \frac{\alpha_-}{2}z & -(1 + \frac{\alpha_-}{2}z)e^{z(\theta_+ - \theta_-)} \end{pmatrix},$$

donc la solution \hat{e} est donnée par

$$\begin{pmatrix} a(z) \\ b(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{z}B^{-1}(z)\begin{pmatrix} \hat{g}_+(z) \\ \hat{g}_-(z) \end{pmatrix}.$$

On note par $\Delta(z)$ le déterminant de $B(z)$, un simple calcul de déterminant donne

$$\Delta(z) = -(1 + \frac{\alpha_+}{2}z)(1 + \frac{\alpha_-}{2}z)e^{2z(\theta_+ - \theta_-)} + (1 - \frac{\alpha_+}{2}z)(1 - \frac{\alpha_-}{2}z).$$

Pour déterminer les pôles de $B^{-1}(z)$ il suffit de résoudre l'équation $\Delta(z) = 0$, donc les pôles sont solutions de

$$e^{2z(\theta_+ - \theta_-)} = \frac{(1 - \frac{\alpha_-}{2}z)(1 - \frac{\alpha_+}{2}z)}{(1 + \frac{\alpha_-}{2}z)(1 + \frac{\alpha_+}{2}z)}.$$

Proposition 20 Les pôles à partie imaginaire positive de $B^{-1}(z)$ sont de la forme $z = it$ avec

$$\begin{cases} \tan\left(t(\theta_+ - \theta_-)\right) = \frac{\frac{\alpha_+ + \alpha_-}{2}t}{\frac{\alpha_+ \alpha_-}{4}t^2 - 1}, t > 0 \\ \text{ou} \\ t(\theta_+ - \theta_-) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \text{ si } \frac{\alpha_+ \alpha_-}{4}t^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Preuve 29 On sait que les pôles sont solutions de

$$e^{2z(\theta_+ - \theta_-)} = \frac{(1 - \frac{\alpha_+}{2}z)}{(1 + \frac{\alpha_+}{2}z)} \frac{(1 - \frac{\alpha_-}{2}z)}{(1 + \frac{\alpha_-}{2}z)}. \quad (5.9)$$

Remplaçons z par $r + it$ dans (5.9) et on prend le carré du module on obtient

$$e^{4r(\theta_+ - \theta_-)} = \theta_1(r) \theta_2(r)$$

où

$$\theta_1(r) = \frac{(1 - \frac{\alpha_+}{2}r)^2 + (\frac{\alpha_+}{2})^2 t^2}{(1 + \frac{\alpha_+}{2}r)^2 + (\frac{\alpha_+}{2})^2 t^2} \quad \text{et} \quad \theta_2(r) = \frac{(1 - \frac{\alpha_-}{2}r)^2 + (\frac{\alpha_-}{2})^2 t^2}{(1 + \frac{\alpha_-}{2}r)^2 + (\frac{\alpha_-}{2})^2 t^2}.$$

On remarque que pour $r > 0$, on a $\theta_1(r) < 1$ et $\theta_2(r) < 1$, par contre $e^{4r(\theta_+ - \theta_-)} > 1$ donc on ne peut pas avoir $r > 0$, le même raisonnement donne que r ne peut pas être

négatif. Donc forcément $r = 0$.

Ainsi les pôles sont de la forme $z = it$ et t est solution de

$$e^{2it(\theta_+ - \theta_-)} = \frac{(1 - \frac{\alpha_+}{2}it)(1 - \frac{\alpha_-}{2}it)}{(1 + \frac{\alpha_+}{2}it)(1 + \frac{\alpha_-}{2}it)}. \quad (5.10)$$

En écrivant le second membre de l'égalité (5.10) sous sa forme exponentielle c'est-à-dire

$$\frac{(1 - \frac{\alpha_{\pm}}{2}it)}{(1 + \frac{\alpha_{\pm}}{2}it)} = e^{2i \arctan(-\frac{\alpha_{\pm}t}{2})},$$

puis par égalité des arguments dans la relation (5.10) on déduit que

$$\begin{aligned} t(\theta_+ - \theta_-) &= \arctan(-\frac{\alpha_+t}{2}) + \arctan(-\frac{\alpha_-t}{2}) \mod(\pi) \\ &= \arctan\left(\frac{\frac{\alpha_+ + \alpha_-}{2}t}{\frac{\alpha_+ \alpha_-}{4}t^2 - 1}\right) \mod(\pi) \end{aligned}$$

donc t est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan(t(\theta_+ - \theta_-)) = \frac{\frac{\alpha_+ + \alpha_-}{2}t}{\frac{\alpha_+ \alpha_-}{4}t^2 - 1}, t > 0 \\ \text{ou} \\ t(\theta_+ - \theta_-) = \frac{\pi}{2} \mod(\pi) \text{ si } \frac{\alpha_+ \alpha_-}{4}t^2 - 1 = 0 \end{array} \right.$$

Remarque 19 1. Nous possédons deux stratégies pour avoir des solutions plus régulières :

- Annuler le résidu au premier pôle pour le bon choix des paramètres α_+ et α_- .
- La deuxième stratégie consiste à pousser le premier pôle le plus loin possible de $z = 0$ pour des coefficients α_+ et α_- bien choisis.

2. On remarque qu'avec la deuxième méthode on peut pousser le premier pôle jusqu'à $\frac{\pi}{\theta_+ - \theta_-} = \frac{1}{x}$, ce qui correspond à choisir (α_+, α_-) deux réels qui tendent vers zéro. Par contre annuler le résidu du premier pôle it_1 pour le bon choix des paramètres α_{\pm} (s'ils existent), le premier pôle qui intervient est supérieur à $\frac{\pi}{\theta_+ - \theta_-} = \frac{1}{x}$. Donc la première méthode est meilleure que la seconde.

Remarque 20 1. Si $\frac{2}{\sqrt{\alpha_+ \alpha_-}} < \frac{1}{2x}$, d'après la figure 5.3, on peut localiser les pôles

$$k = 1, t_1 \in]\frac{1}{\sqrt{\alpha_+ \alpha_-}}, \frac{1}{2x}[$$

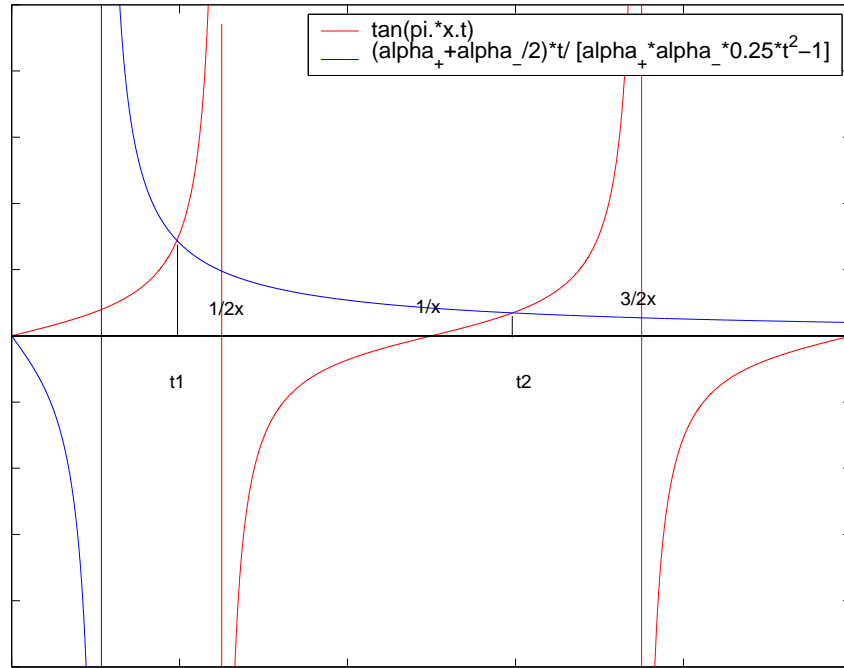
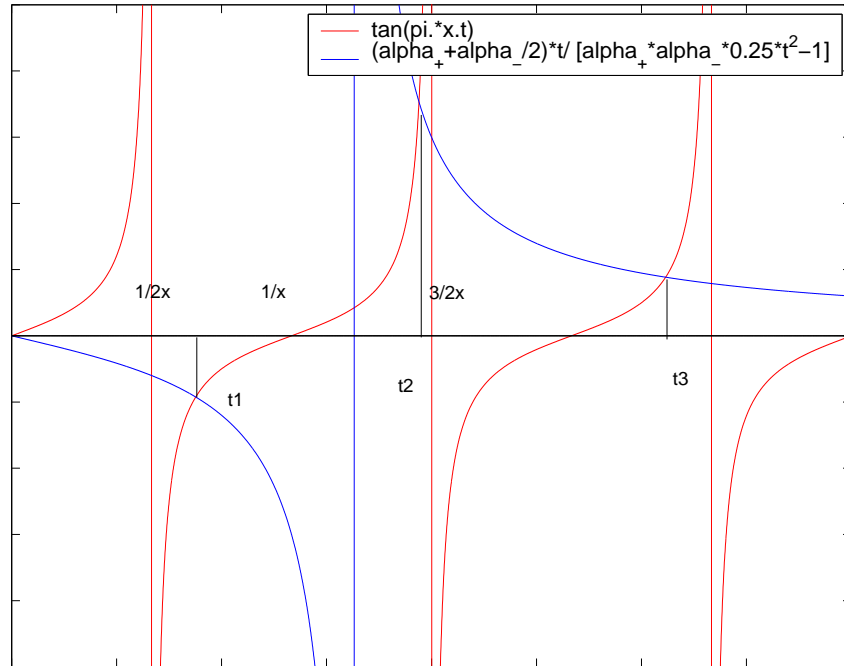
$$k \geq 2, t_k \in]\frac{k-1}{x}, \frac{k-\frac{1}{2}}{x}[$$

2. Si $\frac{2}{\sqrt{\alpha_+ \alpha_-}} > \frac{1}{2x}$ d'après la figure 5.4 on peut localiser les pôles

$$k = 1, t_1 \in]\frac{1}{2x}, \min(\frac{1}{\sqrt{\alpha_+ \alpha_-}}, \frac{1}{x})[$$

$$k \geq 2, t_k \geq \frac{1}{x}$$

3. On note pour les cas limites $\frac{2}{\sqrt{\alpha_+ \alpha_-}} = \frac{1}{2x}$ le premier pôle est donné par $t_1 = \frac{1}{2x}$.

FIG. 5.3 – Cas où $\frac{2}{\sqrt{\alpha_+ \alpha_-}} < \frac{1}{2x}$ FIG. 5.4 – Cas où $\frac{2}{\sqrt{\alpha_+ \alpha_-}} > \frac{1}{2x}$

5.5.2 Etude avec des données bien choisies

Nous travaillons d'un secteur non convexe et on se propose de déterminer α_+ et α_- pour annuler le premier pôle(it_1) pour des données bien choisies.

On prend dans la suite du calcul e_- , une donnée linéaire $e_-(x, y) = b_1x + b_2y$. En utilisant les mêmes techniques de calcul que les sections précédentes, on peut déterminer l'expression de $\hat{g}_+(z)$ et $\hat{g}_-(z)$, et on a

Proposition 21 Soit $e_-(x, y) = b_1x + b_2y$ alors

$$\hat{g}_+(z) = \frac{R^{1+iz}}{1+iz} \left[b_1 \left(-\sin \theta_+ - \frac{\alpha_+}{2} \cos \theta_+ \right) + b_2 \left(\cos \theta_+ - \frac{\alpha_+}{2} \sin \theta_+ \right) \right]$$

et

$$\hat{g}_-(z) = \frac{R^{1+iz}}{1+iz} \left[b_1 \left(-\sin \theta_- + \frac{\alpha_-}{2} \cos \theta_- \right) + b_2 \left(\cos \theta_- + \frac{\alpha_-}{2} \sin \theta_- \right) \right]$$

Proposition 22 Soit Ω un secteur non convexe alors on a

1. $\alpha_+ = \alpha_- (= \alpha)$,
2. on ne peut pas optimiser le coefficient α pour éliminer le premier pôle it_1 .

Preuve 30 – On veut que pour le bon choix de α_{\pm} ,

$$\frac{1}{z} B^{-1}(z) \begin{pmatrix} \hat{g}_+(z) \\ \hat{g}_-(z) \end{pmatrix}$$

n'ait pas de pôle en $z = it_1$ i.e

$$\Delta(it_1) B^{-1}(it_1) \begin{pmatrix} \hat{g}_+(it_1) \\ \hat{g}_-(it_1) \end{pmatrix} = 0.$$

Donc, le problème revient à résoudre le système

$$\begin{pmatrix} -(1 + \frac{\alpha_-}{2} it_1) e^{it_1(\theta_+ - \theta_-)} & 1 - \frac{\alpha_+}{2} it_1 \\ -(1 - \frac{\alpha_-}{2} it_1) & (1 + \frac{\alpha_+}{2} it_1) e^{it_1(\theta_+ - \theta_-)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{g}_+(it_1) \\ \hat{g}_-(it_1) \end{pmatrix} = 0.$$

On remarque que $\det(\Delta(it_1) B^{-1}(it_1)) = \Delta(it_1) = 0$, donc pour résoudre ce système d'inconnus α_{\pm} , il suffit de considérer une seule équation.

Alors, on a

$$\hat{g}_+(it_1) = \frac{1 - i \frac{\alpha_+}{2} t_1}{1 + i \frac{\alpha_-}{2} t_1} e^{-it_1(\theta_+ - \theta_-)} \hat{g}_-(it_1).$$

On pose

$$\lambda(it_1) = \frac{1 - i \frac{\alpha_+}{2} t_1}{1 + i \frac{\alpha_-}{2} t_1} e^{-it_1(\theta_+ - \theta_-)} \in \mathbb{R}.$$

Donc avec cette notation α_{\pm} est solution de

$$\hat{g}_+(it_1) = \lambda(it_1)\hat{g}_-(it_1). \quad (5.11)$$

On sait que le premier pôle est associé à $\lambda(it_1) = -1$, de plus dans tous les cas $t_1 < \frac{\pi}{\theta_+ - \theta_-}$, donc pour un secteur non convexe on a forcément $t_1 < 1$.

La relation $\hat{g}_+(it_1) = \lambda(it_1)\hat{g}_-(it_1)$ donne

$$\begin{cases} \lambda \left(-\sin \theta_- + \frac{\alpha_-}{2} \cos \theta_- \right) = - \left(\frac{\alpha_+}{2} \cos \theta_+ + \sin \theta_+ \right) \\ \lambda \left(\cos \theta_- + \frac{\alpha_-}{2} \sin \theta_- \right) = \left(-\frac{\alpha_+}{2} \sin \theta_+ + \cos \theta_+ \right) \end{cases} \quad (5.12)$$

On met les deux équations du système (5.12) au carré, puis on remplace $\lambda^2 = |\lambda|^2$ par $\frac{1 + (\frac{\alpha_+}{2}t_1)^2}{1 + (\frac{\alpha_-}{2}t_1)^2}$. En développant les deux équations obtenues, et en faisant leurs somme on obtient

$$\left[\left(\frac{\alpha_+}{2} \right)^2 - \left(\frac{\alpha_-}{2} \right)^2 \right] (t_1^2 - 1) = 0. \quad (5.13)$$

Comme on a déjà dit que dans un secteur non convexe $t_1(\alpha_{\pm}) < 1$, donc d'après la formule (5.13) on en déduit que $\alpha_+ = \alpha_-$.

- On a déjà dit qu'avec un seul paramètre on ne peut optimiser que dans le cas convexe, comme nous travaillons dans un secteur non convexe alors il n'existe aucun α qui élimine le premier pôle it_1 .

Remarque 21 1. On remarque que dans un secteur non convexe on n'arrive pas à trouver α pour éliminer le premier pôle it_1 avec la première stratégie.

2. Si on utilise la deuxième stratégie on peut pousser le premier pôle jusqu'à $\frac{\pi}{\theta_+ - \theta_-}$ ce qui revient à choisir α_+, α_- très petits (proche de zéro), donc les conditions d'interface au voisinage du coin se réduisent à des conditions de Neumann, dans ce cas on peut avoir la régularité $H^{\frac{3}{2}}$. On peut d'ailleurs prendre dans ce cas $\alpha = 0$.
3. Numériquement, le choix de α très petit dans le cadre d'une décomposition du domaine, se traduit par l'utilisation des conditions optimisées d'interface partout sur le coté commun des deux sous-domaines.
4. Si on veut envisager une décomposition du domaine dans le cas où le domaine global est un disque, il vaut mieux considérer une décomposition du domaine en trois sous-domaines convexes, qu'on sait déjà optimiser le long des interfaces entre les sous-domaines.

5.6 Construction des conditions d'interface

Nous avons dit qu'on travaille avec des conditions d'interface de la forme

$$\frac{\partial}{\partial n} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\alpha r \frac{\partial}{\partial r})$$

qui sont valable près du coin.

On rappelle que les conditions d'interface se présente de façon générale sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial n} + \beta(r) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\alpha(r)}{2} \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (5.14)$$

où $\alpha(r), \beta(r)$ deux fonctions seront construites de telle sorte que l'opérateur (5.14) soit valable sur toute l'interface entre les deux sous-domaines.

Nous avons déjà dit que pour le coin intérieur au domaine global, on prendra $\beta = 0$ dans les conditions d'interface (5.14).

• Méthode de construction des deux fonctions $\alpha(r)$ et $\beta(r)$

La construction des deux fonctions $\alpha(r)$ et $\beta(r)$ est la même que le chapitre précédent.

Numériquement, une fois le coefficient α déterminé pour avoir le meilleur comportement au coin, on raccordera la fonction αr avec la constante α_{opt} , et on choisit β très petit.

En pratique, les tests numériques sont réalisés sur un pas de maillage h , ce qui correspond à choisir α et β tels que $\frac{\alpha_{opt}}{\alpha h}$ soit de l'ordre de 3 et $\frac{\beta}{\beta_{opt} h}$ soit de l'ordre de zéro. Cela correspond au nombre de mailles près du coin où les coefficients des deux fonctions $\alpha(r)$ et $\beta(r)$ de la condition d'interface sont variables. Si de plus $\frac{\alpha_{opt}}{\alpha h}$ est de l'ordre de 0, on dira qu'on travaille sur zéro mailles près du coin.

5.7 Quelques résultats numériques

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, on étudie le problème de Dirichlet dans le cas où Ω est un disque (voir la figure 5.1).

Nous exécutons toutes nos expériences sur l'équation de l'erreur (l'erreur est la différence entre l'itérée et la solution "exacte").

Nous avons réalisé un algorithme avec le logiciel FreeFem++ dans le cas d'une décomposition du domaine en trois sous-domaines, on fait varier la valeur du paramètre α qui intervient dans les conditions aux limites, on note que pour la valeur optimisée de α on a une convergence plus rapide que les autres valeurs prises par α .

Dans nos expériences numériques, nous faisons un maillage plus raffiné au voisinage du coin (voir la figure 5.5) de façon à nous assurer que ce que nous observons correspond bien à nos prévisions théoriques et n'est pas l'effet d'un filtrage numérique dû à un maillage trop grossier au coin.

• Convergence et nombre d'itérations

Dans cette section nous présentons quelques courbes décrivant l'allure de l'erreur en fonction du nombre d'itérations nécessaires pour atteindre le critère : $\| \text{erreur} \|_{L^2(\Omega)} < 10^{-6}$.

Nous considérons un découpage du domaine en trois sous-domaines et nous regardons la décroissance logarithmique de l'erreur en fonction du nombre d'itérations.

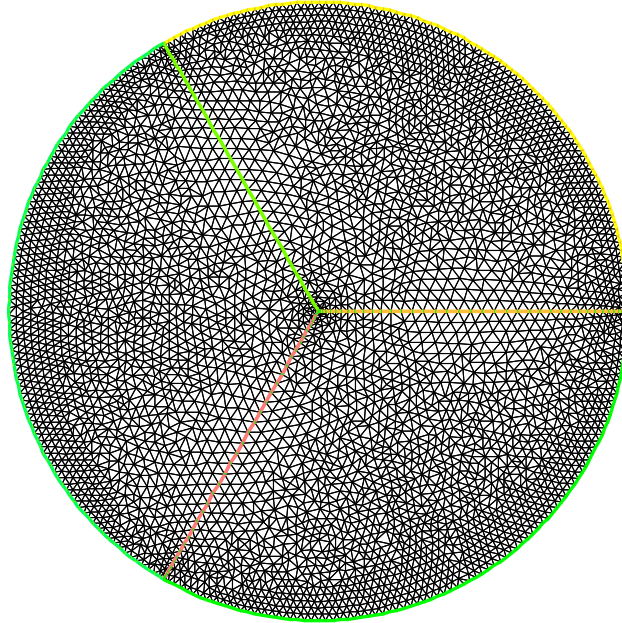


FIG. 5.5 – Décomposition d'un disque de \mathbb{R}^2 en trois sous-domaines avec raffinement du maillage au coin.

Dans un premier temps, nous travaillerons avec les conditions aux limites optimisées dans deux sous-domaines et nous ferons varier le coefficient α dans les conditions aux limites du troisième sous-domaine, puis nous traiterons le cas où le coefficient optimisé au coin est pris dans un seul domaine et nous terminerons notre étude par le choix d'un mauvais coefficient dans les conditions aux limites des trois sous-domaines.

- 1^{er} cas

Nous traitons ici, l'effet d'un mauvais coefficient au coin pris dans les conditions d'interface dans l'un des trois sous-domaines par rapport au cas idéal où tous les coefficients des opérateurs d'interface sont des coefficients optimisés.

Le tableau 5.1 montre le nombre d'itérations nécessaire pour avoir une erreur de l'ordre de 10^{-6} .

La figure 5.7 décrit la décroissance logarithmique de l'erreur. On remarque que la convergence est plus rapide pour les conditions d'interface avec **COC** au coin.

$\frac{\alpha \tan(\frac{\pi x}{2})}{2}$	Nombre d'itérations
10^{-2}	22
10^{-1}	21
1 (COC)	13
10	16

TAB. 5.1 – Nombre d'itérations pour différentes valeurs de $\frac{\alpha \tan(\frac{\pi x}{2})}{2}$.

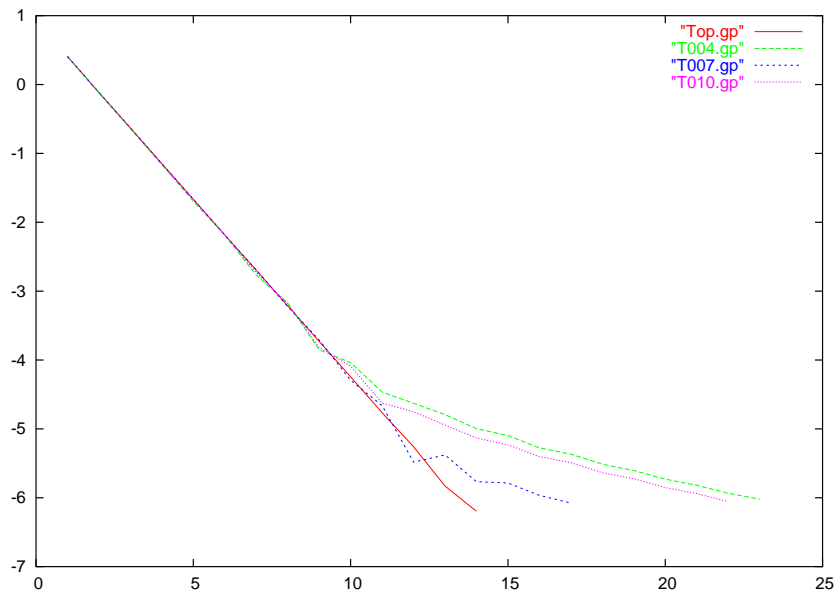


FIG. 5.6 – Top.gp : $\text{Log}_{10}(\text{erreur})$ en fonction des itérations avec **COC**,
 Ti.gp, $i \neq \text{op}$: $\text{Log}_{10}(\text{erreur})$ en fonction des itérations pour différentes
 choix non optimisés de $\frac{\alpha \tan(\frac{\pi x}{2})}{2}$, $\|\text{erreur}\|_{L^2} < 10^{-6}$.

●2^{ème} cas

Nous traitons maintenant le cas où on possède le **COC** dans les conditions d'interface d'un seul sous-domaine, et nous regardons l'influence des mauvais coefficients dans les deux autres sous-domaines par rapport au cas idéal.

Le tableau 5.2 montre le nombre d'itérations nécessaires pour avoir une erreur de l'ordre de 10^{-6} .

La figure 5.7 décrit la décroissance logarithmique de l'erreur. On remarque que la convergence est plus rapide pour les conditions d'interface avec **COC**.

$\frac{\alpha \tan(\frac{\pi x}{2})}{2}$	Nombre d'itérations
0.02	47
0.15	53
10^{-1}	62
1 (COC)	13
10	34
15	129

TAB. 5.2 – Nombre d'itérations pour différentes valeurs de $\frac{\alpha \tan(\frac{\pi x}{2})}{2}$.

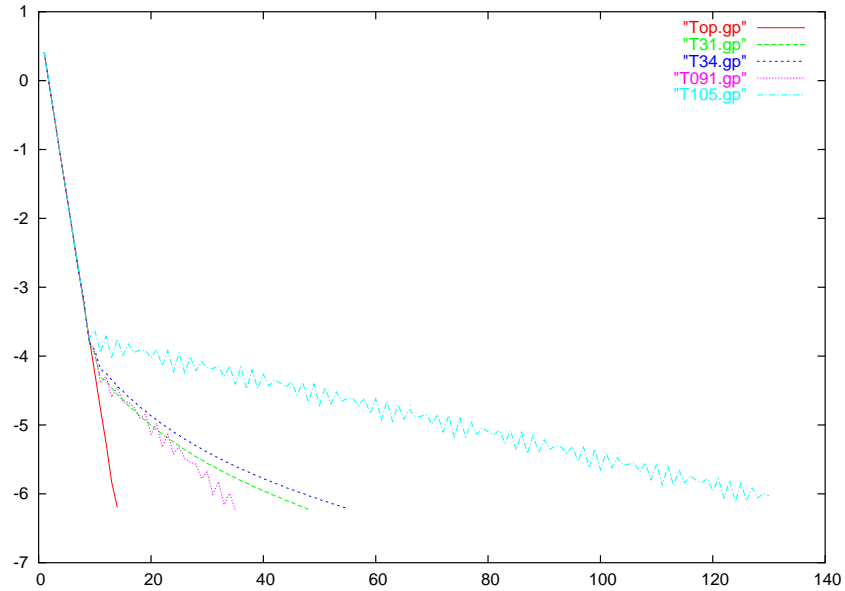


FIG. 5.7 – Top.gp : $\text{Log}_{10}(\text{erreur})$ en fonction des itérations avec **COC**,
 Ti.gp, $i \neq \text{op}$: $\text{Log}_{10}(\text{erreur})$ en fonction des itérations pour différentes
 choix non optimisés de $\frac{\alpha \tan(\frac{\pi x}{2})}{2}$, $\|\text{erreur}\|_{L^2} < 10^{-6}$.

● 3^{ème} cas

Nous terminons par l'étude du cas où on met partout un “mauvais” coefficient au coin et nous regardons l'influence des mauvais coefficients au coin par rapport au cas idéal où on met partout le coefficient **COC** au coin.

Le tableau 5.3 montre le nombre d'itérations nécessaires pour avoir une erreur de l'ordre de 10^{-6} .

La figure 5.8 décrit la décroissance logarithmique de l'erreur. On remarque que la convergence est plus rapide pour les conditions d'interface avec **COC**.

$\frac{\alpha \tan(\frac{\pi x}{2})}{2}$	Nombre d'itérations
0.1	34
1 (COC)	13
10	14
20	16
100	20
150	21

TAB. 5.3 – Nombre d'itérations pour différentes valeurs de $\frac{\alpha \tan(\frac{\pi x}{2})}{2}$.

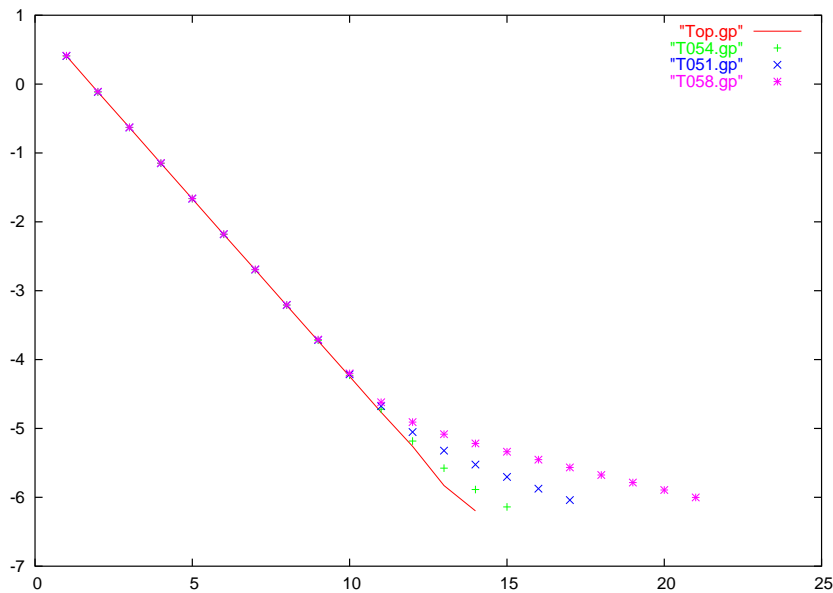


FIG. 5.8 – Top.gp : $\text{Log}_{10}(\text{erreur})$ en fonction des itérations avec **COC**,
 Ti.gp, $i \neq \text{op}$: $\text{Log}_{10}(\text{erreur})$ en fonction des itérations pour différentes
 choix non optimisés de $\frac{\alpha \tan(\frac{\pi x}{2})}{2}$, $\|\text{erreur}\|_{L^2} < 10^{-6}$.

• Les conditions optimisés au coin et à l'interface

On travaille toujours avec les mêmes notations que le chapitre précédent. On donne dans ce paragraphe des résultats numériques qui montrent que les conditions optimisés au coin(cas du **COC**) apportent mieux la convergence au coin.

On rappelle que :

—

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} |u|^2(x) dx$$

—

$$|u|_1 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2(x) dx$$

Les tableaux 5.4, 5.5 montrent le nombre d'itérations nécessaires pour avoir une erreur de l'ordre de 10^{-6} .

On rappelle que dans les tableaux (5.4),(5.5) la colonne “nombre de mailles au coin” correspond au nombre de mailles sur les quelles le coefficient α des conditions d'interface est variable.

Les figures 5.9, 5.10 décrivent la décroissance logarithmique de l'erreur.

On remarque que la convergence est plus rapide pour les conditions d'interface avec **COC**.

Valeurs au coin	Nombre d'itérations	Nombre de mailles au coin
COC	13	3
CICC	24	0

TAB. 5.4 – Nombre d'itérations en fonction de **COC** et **CICC**, avec $\|\text{erreur}\|_{L^2(\Omega)} < 10^{-6}$

Valeurs au coin	Nombre d'itérations	Nombre de mailles au coin
COC	24	3
CICC	60	0

TAB. 5.5 – Nombre d'itérations en fonction de **COC** et **CICC**, avec $|\text{erreur}|_1 < 10^{-6}$

• Erreur en 3D

Nous présentons des exemples décrivant l'erreur en 3D dans le cas d'une décomposition du domaine en trois sous-domaines symétriques. On remarque qu'au cours des itérations l'erreur s'élimine du coin quand on choisit le **COC** dans les conditions d'interface (voir figures 5.11,...,5.14). Par contre si on travaille avec les **CICC**, l'erreur présente des pics très marqués au niveau du coin(voir figures 5.15,...,5.18), donc l'erreur reste au coin.

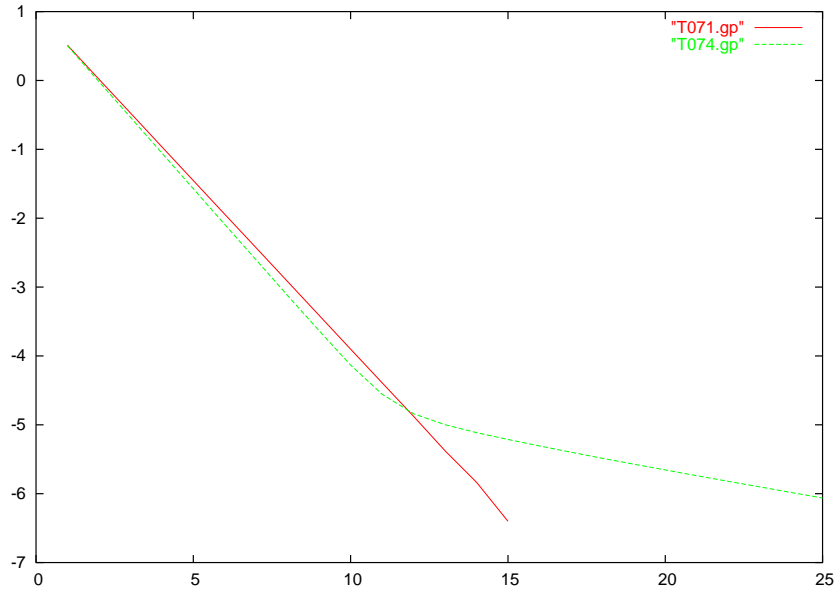


FIG. 5.9 – T071.gp : $\text{Log}_{10}(\text{erreur})$ en fonction des itérations avec **COC**,
T074.gp : $\text{Log}_{10}(\text{erreur})$ en fonction des itérations avec **CICC**, pour
 $\|\text{erreur}\|_{L^2(\Omega)} < 10^{-6}$.

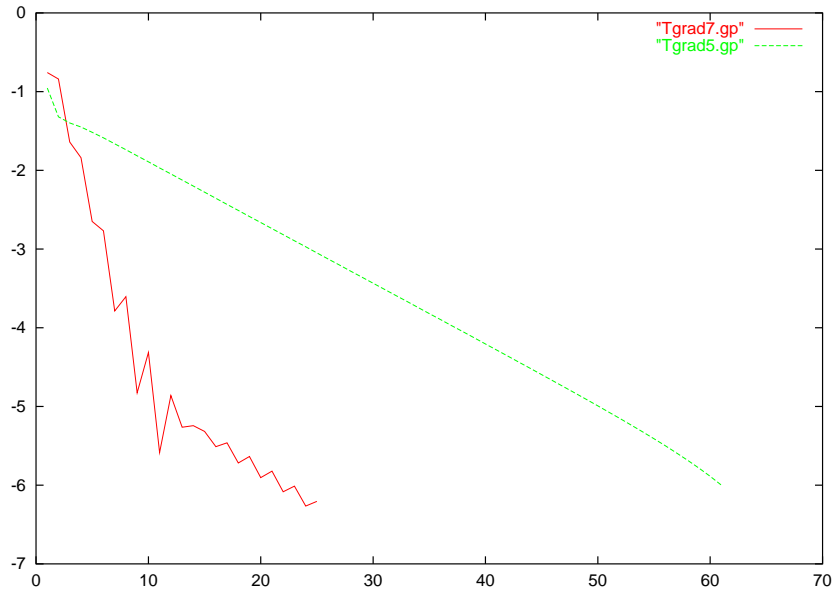


FIG. 5.10 – Tgrad7.gp : $\text{Log}_{10}(\text{erreur})$ en fonction des itérations avec **COC**,
Tgrad5.gp : $\text{Log}_{10}(\text{erreur})$ en fonction des itérations avec **CICC**, pour
 $|\text{erreur}|_1 < 10^{-6}$.

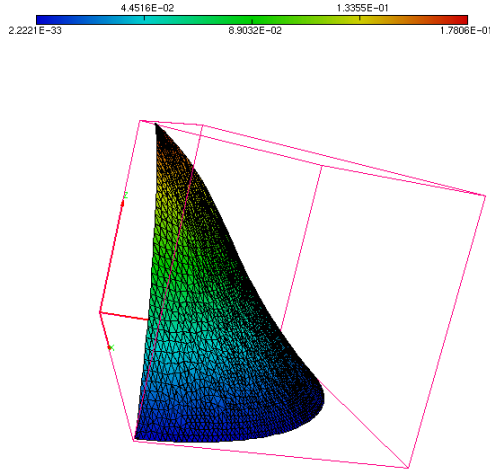


FIG. 5.11 – L'erreur avec **COC** à la première itération.

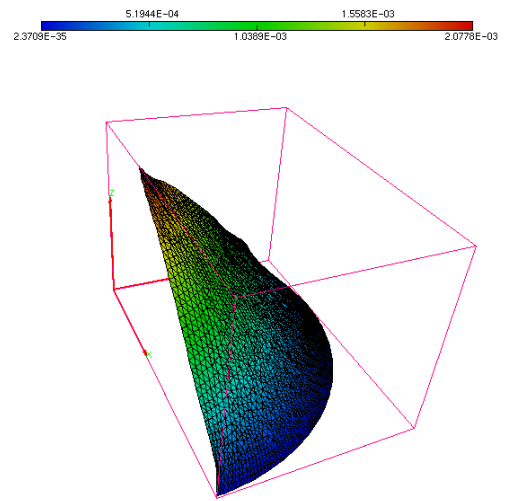


FIG. 5.12 – L'erreur avec **COC** à la 5^{ème} itération.

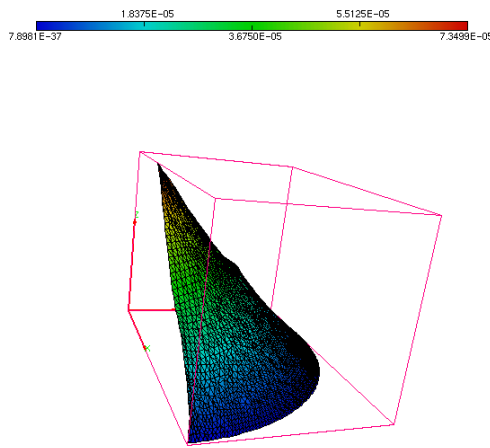


FIG. 5.13 – L'erreur avec **COC** à la 8^{ème} itération.

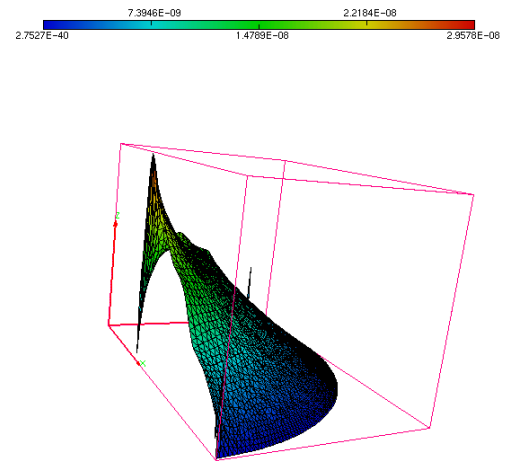


FIG. 5.14 – L'erreur avec **COC** à la 13^{ème} (dernière) itération.

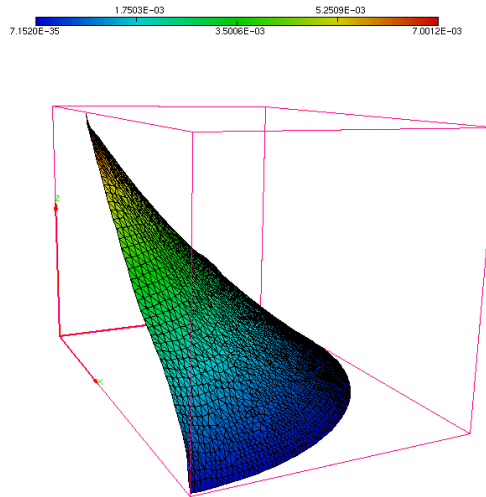


FIG. 5.15 – L'erreur avec **CICC** à la 4^{ème} itération.

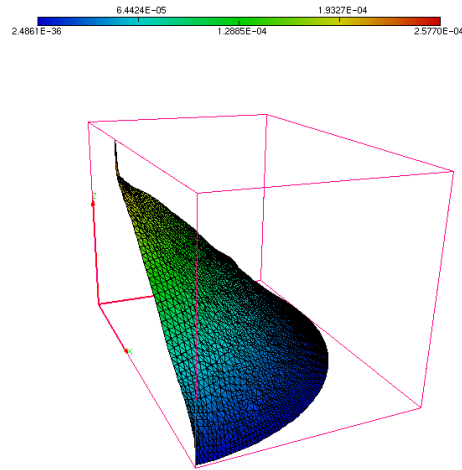


FIG. 5.16 – L'erreur avec **CICC** à la 7^{ème} itération.

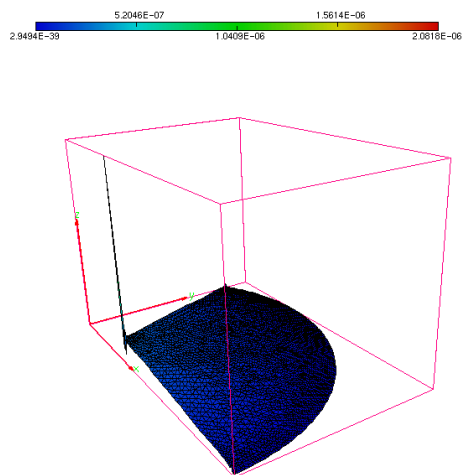


FIG. 5.17 – L'erreur avec **CICC** à la 13^{ème} itération.

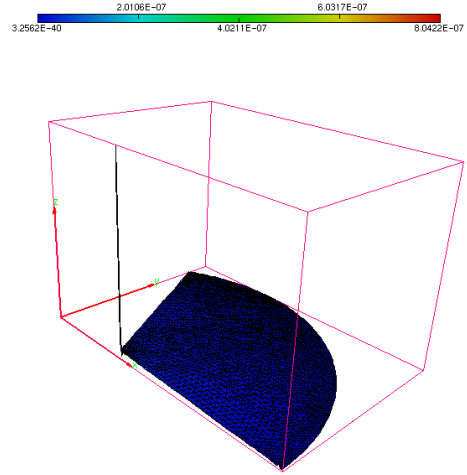


FIG. 5.18 – L'erreur avec **CICC** à la 24^{ème} (dernière) itération.

- **Remarques**

1. Les expériences numériques avec des conditions d'interface bien adaptées au coin et à coefficients optimisés montrent que l'erreur est faible au coin et on a convergence dans 13 itérations (Pour la norme L^2 de l'erreur). En revanche si on choisit d'autres coefficients que les coefficients optimisés l'erreur présente des pics très marqués au niveau du coin et la convergence est lente. Donc, les conditions d'interface à coefficients optimisés au coin(**COC**) conduisent à un gain en vitesse de convergence(les itérations) par rapport aux conditions d'interface de type **CICC**.
2. Dans les deux derniers chapitres, nous avons mis en évidence le fait que la convergence de la méthode est sensible aux variations des paramètres(α, β) intervenant dans les conditions d'interface.

Bibliographie

- [1] Alfio Quarteroni and Alberto Valli.
Domain decomposition methods for partial Differential Equations. Oxford Science Publications, 1999.
- [2] C.Carlenzoli and A. Quarteroni.
Adaptive domain decomposition methods for advection-diffusion problems, The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Vol. 75, Springer Verlag, 1995, pp. 165-186.
- [3] M. Dauge.
Lecture Notes in Mathematics 1341. Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains. March 5th, 1988.
- [4] B. Despres.
Domain decomposition methods and the Helmholtz problem, Mathematical and Numerical aspects of wave propagation phenomena, SIAM. 1991, pp. 44-52.
- [5] Geneviève Raugel.
Résolution numérique par une méthode d'éléments finis du problème de Dirichlet pour le laplacien dans un polygone. C.R Acad. Sc. Paris, t.286(8 mai 1978), serie A, pp. 791-794.
- [6] Pierre Grisvard.
Behavior of the solutions of an Elliptic Boundary Value Problem in a Polygonal or Polyhedral Domain.
- [7] B. Engquist and A. Majda.
Radiation Boundary Conditions for Acoustic and Elastic Wave Calculations, Comm. on Pure and App. Math, Vol. 32, 1979, pp. 313-357.
- [8] B. Engquist and A. Majda.
Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves, MATH. Comp. 31 (139), 1977, pp. 629-651.
- [9] P. Charton, F. Nataf et F. Rogier.
Méthode de décomposition de domaine pour l'équation d'advection-diffusion, C. R. Acad. Sci. Paris,t. 313, serie I, 1991, pp. 623-626.
- [10] F.Nier.
Remarques sur les algorithmes de décomposition de domaines. In séminaire EDP-Ecole polytechnique 1998-99.

- [11] F. Nataf.
Etude et utilisation algorithmique des notions de condition à la limite artificielle et de factorisation. Cas de l'équation de convection-diffusion, Habilitation à diriger des recherches, Université Paris XIII, 1995.
- [12] F. Nataf and F. Rogier.
Factorisation of the convection diffusion operator and the Schwarz Algorithms, MAS, 5, n°1, 1995, pp. 67-93.
- [13] F. Nataf and F. Rogier.
Outflow Boundary Conditions and Domain Decomposition Method, Contemporary Mathematics, Vol.180, 1994, pp.289-293.
- [14] F. Nataf, F. Rogier and E.de Sturler.
Domain decomposition methods for fluid dynamics,
In Sequeira A.(ed) Navier-stokes equations on related non linear analysis, pp.307-377. Plenum Press Corporation, 1995.
- [15] F.Nataf and F.Nier.
Convergence rate of some Domain Decomposition Methods for Overlapping and Nonoverlapping Subdomains, Numerische Mathematik, Vol.75, 1997, pp. 357-377.
- [16] Caroline Japhet and Frédéric Nataf.
The best interface Conditions for domain decomposition methods : Absorbing boundary conditions. To appear in Artificial Boundary Conditions, with applications to computational Fluid Dynamics Problems' edited by L.Tourrette, Nova Science, 2000.
- [17] F.Nataf and F.Nier
Convergence of Domain Decomposition Methods via Semi-Classical Calculus. Commun in Partial Differenrial Equations, 23(5,6), 1998, pp. 1007-1059.
- [18] H.A.Schwarz.
Über einen Grenzübergang durch alternierendes Verfahren,
Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich
Vol.15, may 1870, pp.272-286.
- [19] T.Hagstrom, R.P. Tewarson and A. Jazcilevich.
Numerical Experiments on a Domain Decomposition Algorithm for Nonlinear Elliptic Boundary Value Problem, Appl. Math.Lett.1, n°3, 1988, pp.299-302.
- [20] P.L.Lions.
On the Schwarz Alternating Method I,
First Int.Symp.on Domain Decomposition Methods(R.Glowinski, G.H Golub, G.A. Meurant and J.Periaux,eds), SIAM (Philadelphia,PA), 1988.
- [21] P.L.Lions.
On the Schwarz Alternating Method III
A variant for Nonoverlapping Subdomains,Third Internationnal Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differentiel Equations, SIAM, 1989, pp.202-223.
- [22] V.A.Kondratiev.
Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. Trudi Mosk. Mat. Obsc, 16, 1996, 209-292.

-
- [23] P.Le.Tallec.
Domain decomposition methods in computational mechanics, Computational Mechanics Advances, vol.1, No.2, pp. 121-220, February 1994.
- [24] Tony F.Chan and Tarek P.Mathew.
Domain decomposition algorithms.
In Acta Numerica 1994, pages 61-143.Cambridge University Press, 1994.